

Notre séance du 05/09/07 a encore été riche de questionnements !

- Nous avons traité de la leçon n° 137 : " Formes réduites d'endomorphisme. Applications". Clothilde s'est (à juste titre) demandé de ce qui se cachait sous l'adjectif "réduites".

Réduire un endomorphisme, c'est donner une forme qui va réduire certains calculs.

La diagonalisation ou la trigonalisation en sont des exemples, mais ce ne sont pas les seuls, car il n'est pas toujours possible de les appliquer à un endomorphisme quelconque, notamment si le corps de base est  $\mathbb{R}$ .

De plus même si la trigonalisation donne une forme qui permet de résoudre des systèmes linéaires, ou de résoudre des problèmes de type récursif, ce n'est pas toujours adapté.

Par exemple si on cherche à calculer  $e^A$  (chose qui arrive lors de la résolution d'un système différentiel par exemple) la trigonalisation de  $A$  n'apporte pas grand chose. Une manière (à connaître car au programme) de faire ces calculs est la **décomposition de Dunford** (voir Gourdon ou Giannella-Francinou).

- On pourra faire la distinction avec la leçon n° 136, qui elle parle de **factorisation** de matrices. Une factorisation est à distinguer d'une réduction puisque le but n'est pas le même. Par exemple, le fait de factoriser une matrice de  $GL_n(\mathbb{K})$  en un produit de dilatations/transvections est utile pour faire apparaître un ensemble de générateur du groupe linéaire, ou bien la décomposition polaire pour étudier certaines propriétés topologiques de  $GL_n(\mathbb{K})$ .

Le cas de la décomposition  $LU$  est une factorisation qui permet de résoudre des systèmes linéaires devrait avoir sa place dans cette leçon

- Une question intéressante s'est posée lors d'un exercice :

" Si une suite  $(P_k)_k$  de polynômes de degré fixé  $N$  tend vers un polynôme  $P$  de degré  $N$ , les racines de  $P_k$  "tendent"-elles aussi vers les racines de  $P$  ?"

Le réponse est oui, à quelques conditions. Déjà il faut que les  $P_n$  et  $P$  aient le même nombre de racines. Il est en effet facile de trouver une suite de polynôme sans racines qui tend vers un polynôme scindé.

Prenez par exemple une suite de matrices de rotation  $\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{k}) & -\sin(\frac{\pi}{k}) \\ \sin(\frac{\pi}{k}) & \cos(\frac{\pi}{k}) \end{pmatrix}$  qui vers l'identité quand  $k \rightarrow \infty$ .

Chaque matrice de rotation n'est pas diagonalisable alors que  $I_2$  l'est, ce qui traduit en terme de polynômes caractéristiques donne  $P_k = X^2 - 2\cos(\frac{\pi}{k})X + 1 \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} (X - 1)^2$  bien que chaque  $P_k$  soit sans racine sur  $\mathbb{R}$ .

Cependant si on voit que si on se place sur  $\mathbb{C}$ ,  $P_k = (X - e^{i\frac{\pi}{k}})(X - e^{-i\frac{\pi}{k}})$  les racines de  $P_k$  dans  $\mathbb{C}$  tendent bien vers les racines de  $P$ .

En fait on a le résultat suivant :

### **Théorème 1 (Continuité des racines)**

Soit  $(P_k)_k$  une suite de polynôme scindés de  $K[X]$ , de degré  $N$ , qui tend vers un polynôme  $P$  de degré  $N$ . Alors  $P$  est scindé et pour toute racine  $z$  de  $P$  de multiplicité  $p$ , quelque soit  $\varepsilon$ , pour  $k$  assez grand,  $\mathcal{B}(z, \varepsilon)$  contient exactement  $p$  racines de  $P_n$ .

Voir la preuve dans l'exercice 1 de la feuille n° 3 et noter la nécessité que les  $P_k$  et  $P$  soit de même degré...