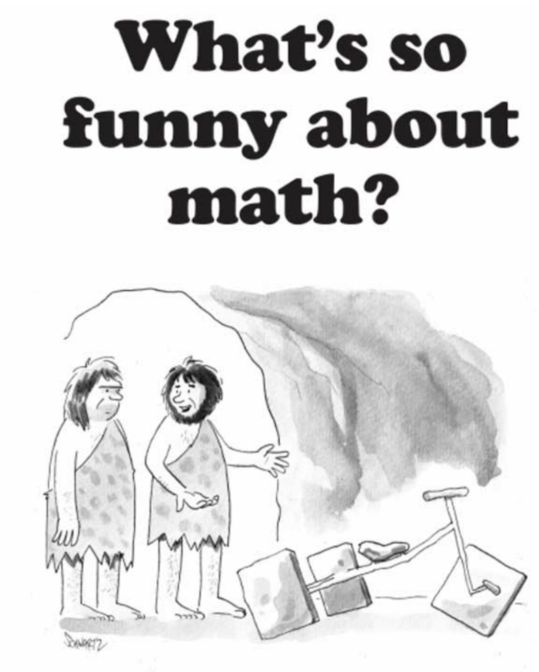
Fonctions : théorème des valeurs intermédiaires



1 Image d'un intervalle par une fonction continue

Rappel

Un intervalle est un ensemble de la forme suivante : $[a; b]$ $]a; b]$ $[a; b[$ $]a; b[$ où a et b sont des nombres réels ou $\pm\infty$, avec $a < b$

Théorème.

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Premier exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x + 1$. Quelle est l'image par la fonction f de l'intervalle $[-2; 2]$?
Dressons le tableau de variations de f :

$f'(x) = 2x + 1$ donc $f'(x) \geq 0$ lorsque $x \geq -\dfrac{1}{2}$, d'où :

x	-2		$-\frac{1}{2}$		2
$f(x)$	3	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	7

Donc l'image de l'intervalle $[-2; 2]$ est l'intervalle $[\dfrac{3}{4}; 7]$.

Deuxième exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$.
Dressons le tableau de variations de f :

$f'(x) = (x+1)e^x$ donc $f'(x)$ est du signe de $(x+1)$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

Limite en $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, F.I.
d'après le théorème de croissance comparée, c'est l'exponentielle qui impose sa limite, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
Limite en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

L'image de $\mathbb{R}$ est l'intervalle $[-\frac{1}{e}; +\infty[$.

2 Théorème des valeurs intermédiaires (version faible)

Théorème.

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$,
Alors pour tout nombre m compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un nombre $x \in [a;b]$ tel que $f(x) = m$.

Premier exemple :
Soit f définie sur l'intervalle $[0;3]$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.
Montrons que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution α dans l'intervalle $[0;3]$:

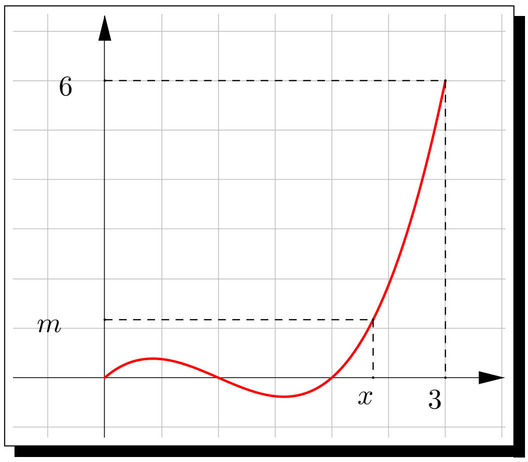


FIGURE 1 – $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ sur l'intervalle $[0;3]$

- f est continue car elle est construite avec des fonctions usuelles,
- $f(0) = 0$ et $f(3) = 6$,
  donc 1 est compris entre 0 et 6

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ possède au moins une solution dans l'intervalle $[0; 3]$.

Remarque :
Lorsque l'intervalle est ouvert en a et/ou en b, on remplace $f(a)$ et/ou $f(b)$ par $\lim_{x \to a} f(x)$ et/ou $\lim_{x \to b} f(x)$.

Deuxième exemple :
Soit g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \ln x + 1$.
Montrons que l'équation $g(x) = 2$ admet une solution dans l'intervalle $[1; +\infty[$:

- g est continue sur $[1; +\infty[$ car elle est construite avec des fonctions usuelles.
- $g(1) = \ln 1 + 1 = 1$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, donc $2 \in [1; +\infty[$.

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 2$ admet une solution α dans l'intervalle $[1; +\infty[$.

Troisième exemple :
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x^2 + 1)e^x$. Montrons que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution dans l'intervalle $\mathbb{R}$:

- f est continue sur $\mathbb{R}$
- Limite en $-\infty$: $\lim_{x \to -\infty} 2x^2 + 1 = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$: F.I.
  d'après le théorème de croissance comparée c'est l'exponentielle qui impose sa limite, donc $\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$
  Limite en $+\infty$: $\lim_{x \to +\infty} 2x^2 + 1 = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, donc $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$
  Donc on a bien $1 \in]0; +\infty[$.

Donc l'équation $f(x) = 1$ admet une solution $\alpha \in \mathbb{R}$.

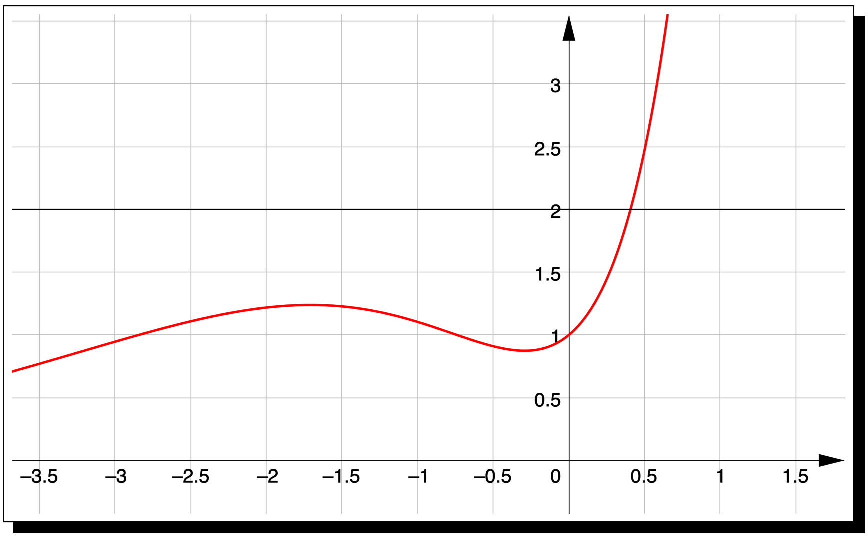


FIGURE 2 – $f(x) = (2x^2 + 1)e^x$ sur $\mathbb{R}$

Dressons le tableau de variations de f :
$f'(x) = (2x^2 + 4x + 1)e^x$

$\Delta = 8$ donc le trinôme admet deux racines, $x_1 = \dfrac{-4-\sqrt{8}}{4} = \dfrac{-2-\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-2+\sqrt{2}}{2}$.

donc $f'(x) \geq 0$ à l'extérieur des racines, d'où :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\approx 1,2$	$\searrow$	$\approx 0,8$	$\nearrow$	$+\infty$

Nous voyons qu'en réalité l'équation $f(x) = 1$ possède trois solutions. Le théorème suivant va nous permettre de préciser un cas qui garantit qu'il n'y a qu'une solution.

3 Théorème des valeurs intermédiaires (version forte)

Théorème.

Étant donnés une fonction f définie sur un intervalle $[a; b]$,
Si :

- f est une fonction continue sur $[a; b]$,
- m est un nombre compris entre $f(a)$ et $f(b)$,
- f est strictement monotone sur $[a; b]$,

Alors l'équation $f(x) = m$ admet une **unique** solution α dans l'intervalle $[a; b]$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - e^{-x} - 1$.
Montrons que l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

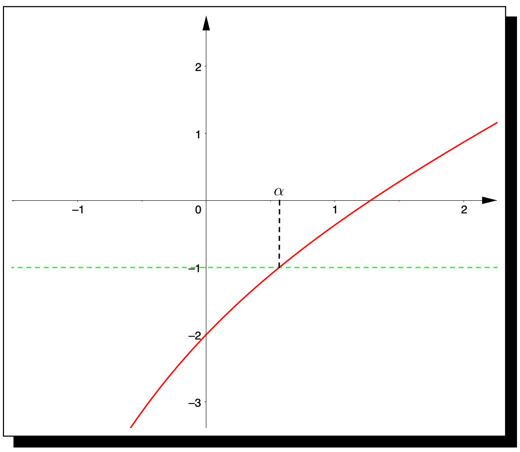


FIGURE 3 – $f(x) = -1$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

— f est continue sur $\mathbb{R}$ car elle est construite avec des fonctions usuelles

— $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ donc -1 est bien compris entre $-\infty$ et $+\infty$.

— $f'(x) = 1 + e^{-x} > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.