Exercices : Probabilité 2

Exercice 1

1. $\boxed{\Omega = \{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(2,2);....;(4,4)\}}$ et $\boxed{X(\Omega) = \{2,3,4,5,6,7,8\}}$
2. Le tableau de loi est :

x_i	2	3	4	5	6	7	8
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

3. $\boxed{E(X) = 5}$

Exercice 2

On lance deux dés équilibrés à 6 faces. On note X la variable aléatoire égale à la plus grande des deux faces, et à l'une ou l'autre des deux faces lorsqu'elle sont égales.

1. $\boxed{\Omega = \{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);....;(6,6)\}}$
2. $\boxed{X(\Omega) = \{1,2,3,4,5,6\}}$
3. Le tableau de loi est :

x_i	1	2	3	4	5	5
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{11}{16}$

$\boxed{E(X) = \frac{161}{36}}$

Exercice 3

On considère une variable aléatoire X prenant les valeurs $0, 1, 2$ et 3 .

On donne $P(X = 0) = \frac{1}{10}$, $P(X = 1) = \frac{1}{8}$ et $P(X = 2) = \frac{1}{5}$.

1. $\boxed{X(\Omega) = \{0,1,2,3\}}$
2. $\boxed{P(X = 3) = \frac{23}{40}}$.
3. $\boxed{E(X) = \frac{9}{4}}$

Exercice 4

1. $2P(X = 3) + \frac{1}{10} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1.$
   En traitant cette égalité comme une équation dont l'inconnu est $P(X = 3)$, on trouve $\boxed{P(X = 3) = \frac{3}{40}}$
2. $\boxed{E(X) = \frac{71}{40} \approx 1,775}$

Exercice 5

On lance un dé pipé qui a une probabilité égale à $\frac{1}{2}$ de tomber sur 6, et la même probabilité de tomber sur chacune des autres faces de 1 à 5.

1. On lance une fois le dé et on note X le résultat du dé.
   (a) Montrer que $P(X=1)=0,1$. (b) Donner la loi de probabilité de X.
   (c) Calculer l'espérance de X .
2. On lance deux fois le dé et on note Y le nombre de 6 obtenus.
   (a) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Y ?
   (b) Calculer l'espérance de Y et l'interpréter par une phrase.
3. On lance deux fois ce même dé et on note S la somme des résultats obtenus.
   (a) Donner la loi de S.
   (b) Calculer l'espérance de S et l'interpréter par une phrase.

Exercice 6

On tire une boule au hasard dans une urne contenant six boules indiscernables au toucher, une verte, deux jaunes et trois rouges. Une boule verte rapporte 20 points, une jaune 10 points et une rouge 5 points. On note X le gain à l'issue d'un tirage.

1. Donner la loi de X.
2. Calculer l'espérance de X.

1 Linéarité de l'espérance

Exercice 7 (*Utilisation de la formule du cours*)

Soit X une variable aléatoire telle que $E(X)=1,2$.
Calculer :

(a) $E(2X-3)$ (b) $E(-X+2)$ (c) $E(5-3X)$ (d) $E(1+2X)$

Exercice 8

On jette un dé à six faces truqué. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre apparue sur la face supérieure. On suppose que sa loi est donnée par :

x_i	1	2	3	4	5	6
$P([X=x_i])$	0,1	0,1	0,2	0,35	0,15	0,1

1. Calculer l'espérance de X.
2. Calculer

Exercice 9 (*Linéarité de l'espérance*)

On tire au hasard deux boules dans une urne contenant 3 boules rouges et 2 boules bleues. On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouge tirées.

1. Donner la loi de X et son espérance.
2. Une boule rouge pèse 20g et une boule bleue 30g. Exprimer en fonction de X la masse M des deux boules tirées et calculer l'espérance de M.

2 Fonctions de répartitions

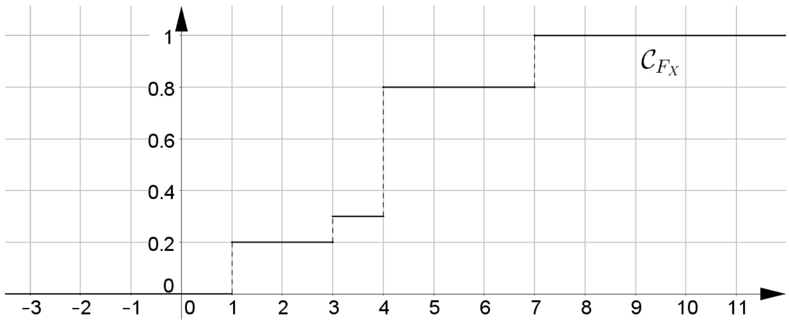
Exercice 10 (*Tracer une fonction de répartition*)

Un dé cubique est équilibré, mais ses faces sont les suivantes : -2 ; -2 ; 1 ; 1 ; 1 ; 4. On note X la variable aléatoire égale au nombre affiché sur le dé après un lancer.

1. Déterminer la loi de X et calculer son espérance.
2. Tracer la fonction de répartition de X.

Exercice 11 (*Retrouver une loi à partir de la fonction de répartition*)

On a représenté ci-dessous la fonction de répartition d'une variable aléatoire X.



Donner la loi de X.

Exercice 12

On lance quatre fois une pièce de monnaie, et on note X le nombre de pile obtenus.

Représenter la loi de X par un diagramme à bâtons ainsi que la courbe représentative de sa fonction de répartition.

Exercice 13

Cinq boules indiscernables au toucher sont placées dans une urne. Deux sont blanches, et trois sont noires. On tire au hasard, successivement et sans remise des boules de l'urne, et on s'arrête dès que l'on a pioché une boule blanche. On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de boules tirées.

1. Déterminer $X(\Omega)$ et la loi de probabilité de X.
2. Quelle est la probabilité que l'on s'arrête avant d'avoir tiré 3 boules ?

3. Tracer la courbe représentative de la fonction de répartition de X.
4. Calculer l'espérance de X.
5. On note Y le nombre de boules restant dans l'urne à l'issue du tirage. Exprimer Y en fonction de X et en déduire l'espérance de Y.