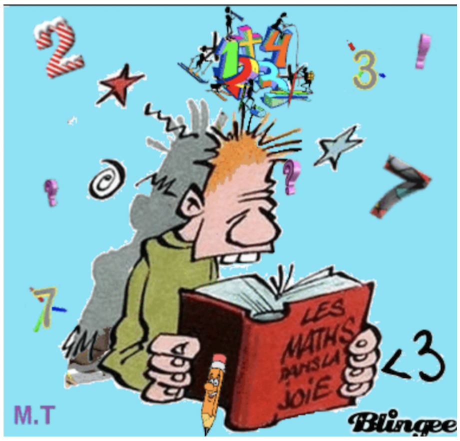
Logique et ensembles



1 Logique

Le mot logique provient du grec « logos ». Il désigne à l'époque de l'antiquité, une méthode d'argumentation. A l'origine de cette façon de raisonner on cite souvent Socrate et plus particulièrement un de ses disciples Platon, qui entendait ainsi s'opposer aux sophistes.

Tout l'édifice du raisonnement mathématique repose sur la logique du tiers exclu, c'est à dire qu'une proposition est soit vraie soit fausse.

Cette façon de raisonner est culturellement située. Il existe des sociétés où le concept de vérité est beaucoup plus flou, du moins du point du point de vue occidental[1].

1.1 Connecteur d'implication

Soient les deux propositions

$$A = \text{« Il y a un arc-en-ciel »} \quad \text{et} \quad B = \text{« Il pleut »}.$$

Un lien logique relie ces deux propositions. On peut l'exprimer de trois façons :

1. Pour qu'il y ait un arc-en-ciel, il **faut** qu'il pleuve ;
2. S'il n'y a pas de pluie, il ne peut pas y avoir d'arc-en-ciel ;
3. S'il y a un arc-en-ciel alors il pleut **nécessairement**.

On dit que la condition B est une condition nécessaire pour la proposition A.

Notation

On note ce lien logique : $\boxed{A \Rightarrow B}$

On dit que la condition B est une **condition nécessaire** pour A.

1. L'anthropologue Lévi-Strauss a par exemple montré dans « La pensée sauvage », que certaines tribus amazoniennes se voient à la fois comme homme mais aussi comme oiseau, sans pour autant qu'il n'y ait de contradiction logique.

1.2 Négation

L'exact contraire d'une proposition est appelé sa négation. Il faut se méfier du signifié contenu dans le mot « contraire ». Il est par exemple usuel de dire que le contraire de "Il pleut" est "Il fait soleil". Or ceci n'est pas l'exact contraire de "Il pleut" car il peut ne pas pleuvoir et ne avoir de soleil. L'exact contraire de "Il pleut" doit recouvrir toutes les situations où il ne pleut pas.

Notation

La négation d'une proposition A est notée $\overline{A}$.

Dans l'exemple ci dessus on a :

$$\overline{A}= \text{« Il n'y pas d'arc-en-ciel »} \quad \text{et} \quad \overline{B}= \text{« Il ne pleut pas »}.$$

1.3 Connecteur "Et" / "Ou"

Ces connecteurs ont le sens que leur confère le langage courant :

Définition

1. La proposition "A **ou** B" sera dite vraie lorsque A sera vraie ou B sera vraie. Dans le cas contraire, elle sera fausse.
2. La proposition "A **et** B" sera dite vraie lorsque A sera vraie et B sera vraie. Dans le cas contraire, elle sera fausse.

Exemple : On considère une urne qui contient un grand nombre de boules et de cubes. Les boules et les cubes peuvent être rouges ou verts. On prend un objet dans cette urne.

On note :

R=" L'objet tiré est rouge " , V=" L'objet tiré est vert " , B=" L'objet tiré est une boule " , C=" L'objet tiré est un cube ".

Alors on peut écrire les égalités suivantes :

— " Tirer une boule verte " = (B et V)

— " Tirer une boule ou un objet vert " = (B ou V)

— " Tirer un cube rouge " = (C et R)

On notera que la proposition (C et B) est impossible, on dit que les propositions sont **incompatibles**.

2 Ensembles

Un ensemble est un objet abstrait qui désigne le fait de "regrouper" des éléments ensembles. Ici aussi ce mot suit fidèlement le sens du langage. La notion d'ensemble est très récente dans l'histoire des mathématiques. La difficulté de donner une définition précise qui ne fait pas appel au langage fait que c'est une notion à la fois naturel et en même temps qui n'est pas sans difficulté.

On connaît déjà des exemples d'ensembles : $\mathbb{R}$ est l'ensemble qui regroupe tous les nombres qui ont la propriété d'être réels.

Il y a deux types d'ensemble : **fini** ou **infini** .

Un ensemble fini est un ensemble dans lequel on peut numéroter les éléments de 1 à n où n est un entier naturel. Dans ce cas n est le **nombre d'éléments** de l'ensemble.

Un ensemble est infini s'il n'est pas fini.

Notation

Pour écrire les élements d'un ensemble, on utilise des **accolades**. Exemple : Si E est l'ensemble des entiers naturels de 1 à 6, on écrira $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
Puisque 1 est un élément ce cet ensemble, on note $1 \in E$.

2.1 Sous-Ensembles et complémentaires

Définition

Si A et B sont deux ensembles, on dira que A est un **sous-ensemble** de B si tous les éléments de A sont dans B. On écrira $\boxed{A \subset B}$.

Exemple : $\{1; 2\} \subset \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Définition

Si A est un sous-ensemble d'un ensemble E, le **complémentaire** de A dans E désigne l'ensemble de **tous les éléments de** E **qui ne sont pas dans** A. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble E on notera $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E.

Exemple : $A = \{1; 2\} \subset \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} = E$ alors $\overline{A} = \{3; 4; 5; 6\}$ On remarque que cette notation est la même que pour la négation d'une proposition, ce qui est cohérent car la négation de " être dans A " est " ne pas être dans A "

2.2 Union et intersection

Définition

Si A et B sont deux ensembles alors on notera

1. $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ l'ensemble de tous les éléments qui sont **soit dans** A **et dans** B.
2. $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ l'ensemble de tous les éléments qui sont **à la fois dans** A **et dans** B.

Exemple :
$A = \{1; 2; 3; 4\}$ et $B = \{3; 4; 5; 6\}$
$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $A \cap B = \{3; 4\}$

Cas particulier

Lorsque qu'il n'existe pas d'éléments qui sont à la fois dans A et dans B, on dit que l'intersection de A et de B est **vide**. On note $\boxed{\mathbf{A \cap B = \emptyset}}$

2.3 Loi de Morgan

Voir l'exercice fait en classe.

Loi de Morgan

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Preuve : Sur un dessin

3 Produit cartésien d'ensemble

Il peut être commode pour certains exercices d'avoir recours une notation particulières.

Par exemple si on lance un dé à six faces puis une pièce de monnaie, il est commode de présenter les résultats sous forme de couple : Par exemple $(3; F)$ désigne le résultat du dé et de la pièce.

L'ensemble des résultats sera un couple $(...; ....)$ où la première position sera un nombre entre 1 et 6, et la deuxième position sera F ou P. C'est une notation déjà connue : vu lors des coordonnées de points dans le plan.

On notera l'ensemble des résultats possible $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \times \{P, F\}$.

Remarque : si on lance d'abord la pièce et ensuite le dé, il faudrait alors utiliser $\{P, F\} \times \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Notation

Si A et B sont deux ensembles, $\mathbf{A \times B}$ désigne un nouvel ensemble. Il contient tous les couples $(a; b)$ où $a \in A$ et $b \in B$

Point de vigilance : contrairement aux ensembles, l'ordre compte. L'élément $(a; b)$ n'est ainsi pas égal à l'élément $(b; a)$ qui lui appartient à $B \times A$

Remarque : On peut facilement étendre cette notation à un produit quelconque d'ensemble. $A_1 \times A_2 \times ....A_n$ désigne l'ensemble des nuplets $(a_1, a_2, ..., a_n)$ où $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2....a_n \in A_n$

On utilise le vocabulaire suivant :

$n =$	Vocabulaire
2	couple
3	triplet
4	quadruplet

4 Ensemble des parties

Si E est un ensemble, $\mathcal{P}(E)$ désigne un nouvel ensemble nommé *ensemble des parties* de E. Cet ensemble contient tous les sous-ensemble de E.

Exemple : Si $E = \{1; 2; 3\}$ alors $\mathcal{P}(E) = \{\{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1; 2\}; \{1; 3\}; \{2; 3\}; \{1; 2; 3\}, \emptyset\}$