Fonctions 3 : exercices

1 Continuité

Exercice 1

Dire pour chacune des fonctions suivantes si elle est continue sur son ensemble de définition :

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = x^2 + 1 & \text{si } x \in]-\infty; 0] \\ f(x) = \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x \in]0; +\infty[\end{cases}$
2. g définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} g(x) = -1 - 2x & \text{si } x \in]-\infty; -1] \\ g(x) = x + 1 & \text{si } x \in]-1; 2[\\ g(x) = -x + 4 & \text{si } x \in [2; +\infty[\end{cases}$
3. Proposer un code `PYTHON` permettant d'implémenter les fonctions f et g.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x + a & \text{si } x \in [0; 4] \\ f(x) = \dfrac{1}{x-3} & \text{si } x \in]4; +\infty[\end{cases}$

Déterminer la valeur de a pour laquelle la fonction f est continue sur $[0; +\infty[$.

2 Révisions : équations de droite

Exercice 3

Soit D la droite d'équation $y = 2x - 1$. Les points suivants appartiennent-ils à la droite D : $A(1;3)$ $\quad B(4;7)$ $\quad C(-1;-3)$?

Exercice 4

Tracer les droites dont le nom et l'équation sont données ci-dessous (utiliser la figure.1)

$$(D_1) : y = 2x - 4 \quad (D_2) : x = -4 \quad (D_3) : y = -x + 3 \quad (D_4) : y = 2x$$
$$(D_5) : x = 3 \quad (D_6) : y = \frac{3}{2}x + 1$$

Exercice 5

Donner l'équation des droites de la figure.2 par simple lecture graphique .

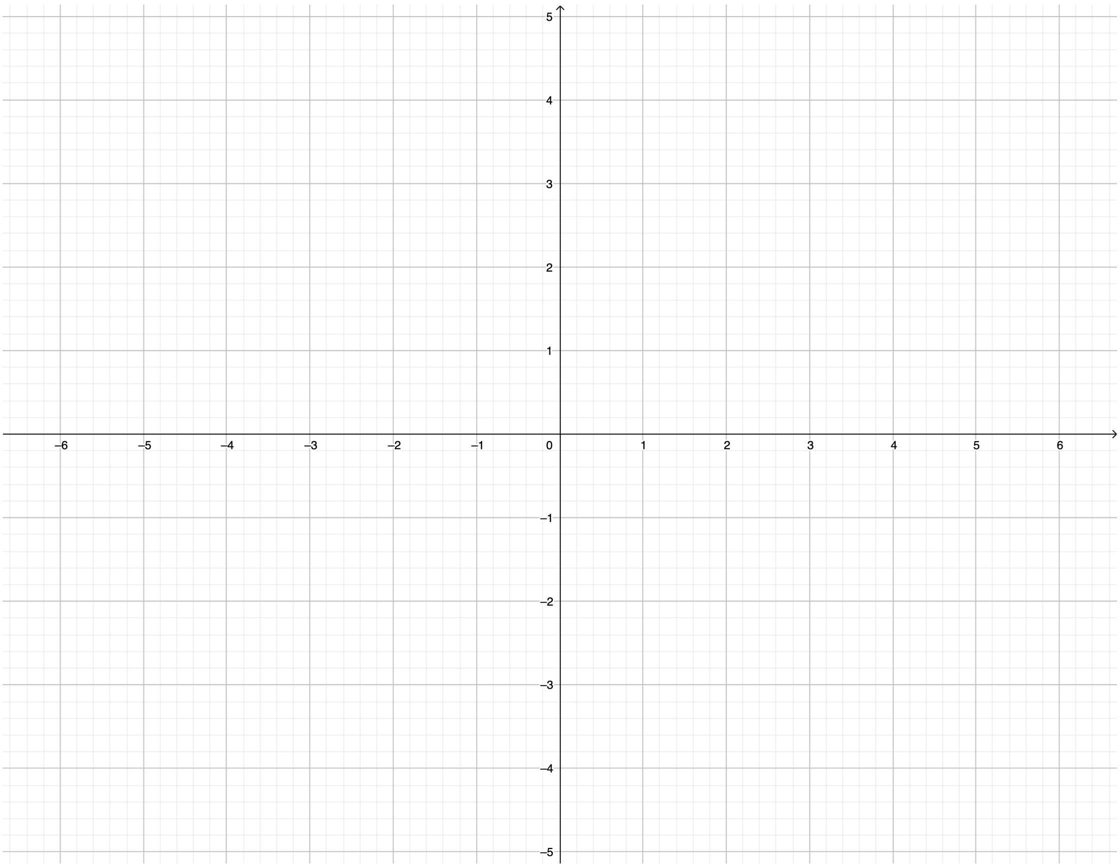


FIGURE 1 – Exercice 4

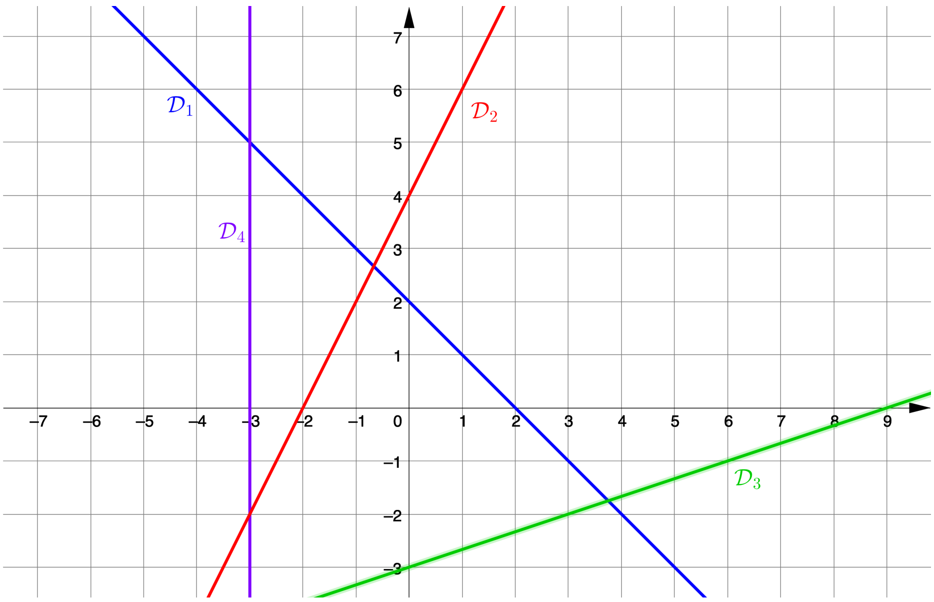
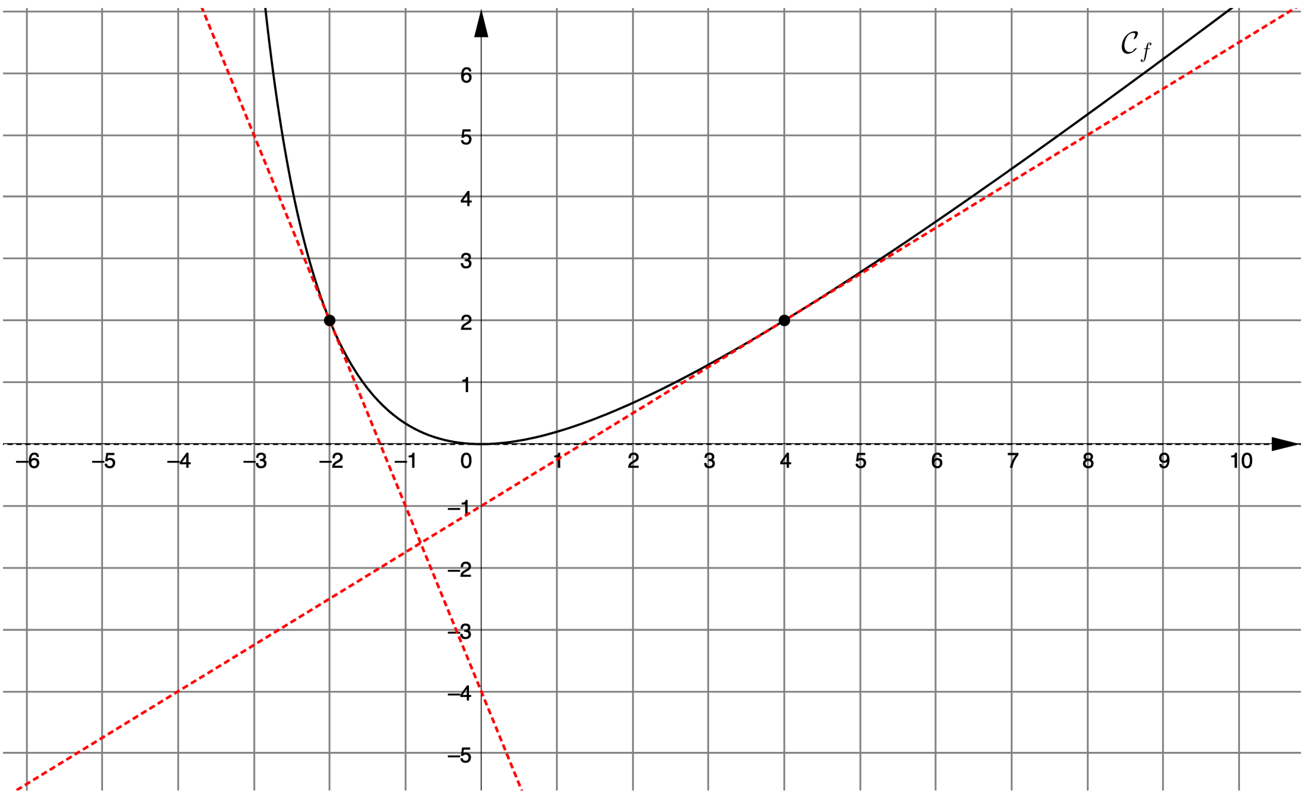


FIGURE 2 – Exercice 5

3 Nombre dérivé

Exercice 6

On a représenté ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f ainsi que les tangentes aux points d'abscisses -2, 0 et 4.



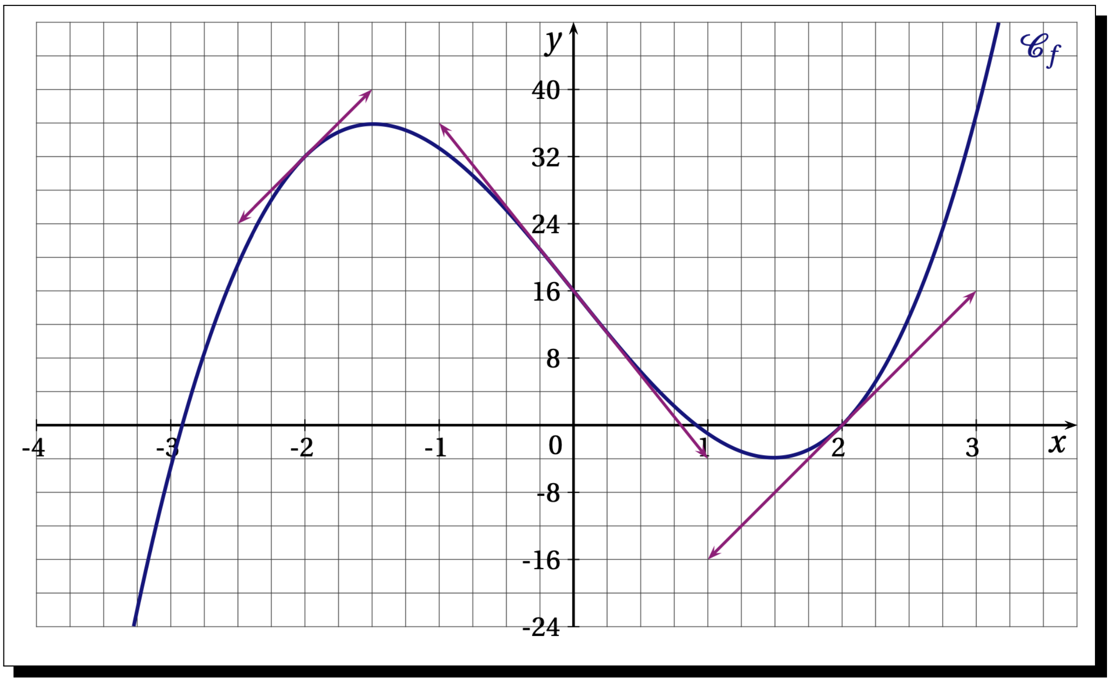
Donner les valeurs de $f'(-2)$, $f'(0)$ et $f'(4)$, puis l'équation des tangentes aux points d'abscisses $x = -2$, $x = 0$, $x = 4$.

Exercice 7

Si pour une une fonction f, l'équation de la tangente en $a = 1$ est d'équation $y = -2x+3$, que valent $f(1)$ et $f'(1)$?

Exercice 8 (*D'après https ://fontaine-maths.fr*)

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Certaines tangentes à la courbe ont également été représentées.



1. **À partir du graphique** :
   (a) Déterminer $f'(-2), f'(0)$ et $f'(2)$
   (b) Donner une estimation des solutions de l'équation $f'(x) = 0$.
2. **La fonction f est définie pour tout réel x par $f(x) = 3x^3 - 20x + 16$.**
   (a) Calculer $f'(x)$.
   (b) Calculer $f'(-2), f'(0)$ et $f'(1.5)$, puis comparer ces résultats avec les valeurs obtenues dans la partie A.
   (c) Déterminer les abscisses des points en lesquels la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ est parallèle à l'axe des abscisses.
   (d) Donner le tableau de variation de la fonction f.

4 Fonctions dérivées

Exercice 9

Calculer la dérivée des fonctions suivantes sur leur intervalle de définition :

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ sur $\mathbb{R}$ b) $g(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 1$ sur $\mathbb{R}$ c) $h(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$

d) $A(u) = \frac{u}{4} - 2$ sur $\mathbb{R}$ e) $B(u) = (u^2 - 1)\sqrt{u}$ sur $[0; +\infty[$ f) $C(u) = \frac{u+2}{1-u}$ sur $\mathbb{R} - \{1\}$

Exercice 10

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ sur $\mathbb{R}$

(b) $f(x) = 3x^4 - 4x^2 + \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$

(c) $g(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$

(d) $f(t) = 1 - \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t^2}$ sur $\mathbb{R}^*$

(e) $f(x) = \sqrt{x} - x$ sur $]0; +\infty[$

(f) $g(t) = 3\sqrt{x} + \dfrac{3}{x}$ sur $]0; +\infty[$

Exercice 11

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \sqrt{3x+1}$ sur $]-\dfrac{1}{3}; +\infty[$

(b) $g(x) = (1+x^2)^4$ sur $\mathbb{R}$

(c) $h(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ sur $\mathbb{R}$

(d) $f(t) = 2\sqrt{1-2t}$ sur $]-\infty; \dfrac{1}{2}[$

(e) $g(x) = 3(2x+1)^5$ sur $\mathbb{R}$

(f) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$sur $\mathbb{R} - \{-2\}$

5 Equation de la tangente

Exercice 12

Calculer la dérivée des fonctions suivantes et donner l'équation de la tangente en $x = 1$:

a) $f(x) = (x^2+1)\sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$ b) $g(x) = (x^3+1)(x^3-1)$ sur $\mathbb{R}$

c) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ sur $\mathbb{R} - \{1\}$ d) $g(t) = \dfrac{1-2t}{1+t^2}$ sur $\mathbb{R}$

6 Variations

Exercice 13

Établir les variations de chacune des fonctions ci-dessous :

a) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$ sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

b) $g(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$

c) $h(x) = (x+1)(x^2-3x+4)$

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;-1[$ par $f(x)=\dfrac{-2x+3}{x+1}$.

1. Déterminer la limite de f en -1 et en $-\infty$.
2. Que peut-on en déduire pour la courbe de f ?
3. Étudier les variations de f.
4. Représenter graphiquement la courbe de f.

7 Approximation affine

Exercice 15

On souhaite trouver une valeur approchée de $\sqrt{102}$ par une approximation affine.
Soit f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$.

1. Écrire l'approximation affine de la fonction f au voisinage de $a=100$.
2. Utilisez cette approximation pour déterminer une valeur approchée de $\sqrt{102}$.
3. Comparer la valeur approchée et la valeur exacte.

Exercice 16

Reprendre la méthode de l'exercice précédent pour calculer **à la main** une valeur approchée des nombres :

(a) $\sqrt{405}$ (b) $\dfrac{1}{51}$ (c) 103^3

8 Applications

Exercice 17

Le coût total de la production de x tonnes d'un produit est donné par $C_T(x)=x^3-2x^2+10x+150$ unités monétaires. La production attendue se situe entre 6,5 et 7,5 tonnes.

1. Écrire l'approximation affine de C_T au voisinage de 7 tonnes.
2. Utiliser cette approximation pour estimer le coût de la production de 7,4 tonnes.
3. Quelle est l'erreur maximale commise, en pourcentage, par l'approximation pour x compris entre 6,5 et 7,5 ?

9 Convexité

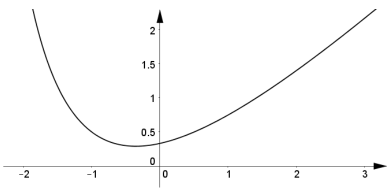
Exercice 18

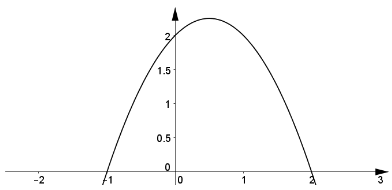
Parmi les fonctions suivantes, dire si elles sont convexe ou concave sur leur intervalle de définition.

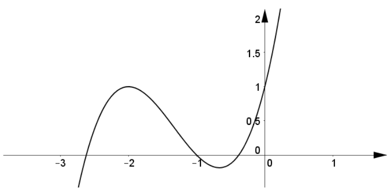
1. $f(x) = x^3 + 2x + 1$ sur $\mathbb{R}$.
2. $g(x) = x^3 - x$ sur $[0; +\infty[$.
3. $h(x) = 3x - 4$ sur $\mathbb{R}$.
4. $k(x) = \dfrac{x}{x+1}$ sur $]-1; +\infty[$.

Exercice 19

Dans chaque cas, dire si la fonction est convexe, concave, ou ni l'un ni l'autre.

(a) 

(c) 

(b) 

Exercice 20

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - \dfrac{8}{x}$.
Déterminer les coordonnées du point d'inflexion de f.

Exercice 21

Soit $P(x) = x^3 - 2ax^2 + x + 1$. Déterminer la valeur de a pour que f admette un point d'inflexion en $x = 2$.