1 Propriété des fonctions logarithmes

Exercice 1 (*Propriétés algébriques*)

Exprimer les nombres ci-dessous en fonction de $\ln 2$ et de $\ln 3$ uniquement :

(a) $\ln 6$ (b) $\ln(2^{2021})$ (c) $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$ (d) $\ln 12$ (e) $\ln 1024$ (f) $\ln\left(\dfrac{8}{9}\right)$

Exercice 2 (*Dérivées*)

Calculer la dérivée des fonctions suivantes définies sur $]0;+\infty[$:

(a) $f(x) = 2\ln x - x$ (b) $g(x) = x^2 - 3\ln x$ (c) $h(t) = t^2 \ln t$ (d) $f(t) = \dfrac{\ln t}{t^2}$

2 Propriété des fonctions exponentielles

Exercice 3 (*Propriétés algébriques*)

Simplifier les expressions :

(a) $e^3 \times e^{-1}$ (b) $\dfrac{e^5}{e^2}$ (c) $\dfrac{e^{-2}}{e^{-4}}$ (d) $\left(e^2\right)^3$

Exercice 4

Calculer la dérivée des fonctions suivantes, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$:

(a) $f(x) = x^2 - e^x$ (b) $g(x) = xe^x$ (c) $h(t) = e^{2t}$ (d) $f(t) = \dfrac{1}{e^t + 1}$

3 Equations / Inéquations

Exercice 5 (*Equations*)

Résoudre les équations, lorsque cela est possible :

(a) $3\ln x - 2 = 0$ (b) $2\ln x + 1 = 0$ (c) $\ln x + 1 = 5 - \ln x$

(d) $\ln(x^2) + 1 = 5 - \ln x$ (e) $\ln(\dfrac{x}{2}) + 1 = 5$ (f) $\ln(3x) + 1 = 2$

Exercice 6 (*Equations*)

Résoudre les équations, lorsque cela est possible :

(a) $e^x = 2$ (b) $e^x = -2$ (c) $3e^x - 2 = 0$

(d) $3e^x - 2 = 4 - e^x$ (e) $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$ (f) $e^{2x} = 1$

Exercice 7 (*Inéquations*)

Résoudre les inéquations :

(a) $\ln x + 3 \geq 0$ (b) $e^x - 1 \leq 0$

(c) $\ln x(\ln x + 1) > 0$ (Faire un tableau de signe)

(d) $x(e^x - 2) < 0$ (Faire un tableau de signe)

4 Limites

Exercice 8

Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque $x \to a$:

(a) $f(x) = \ln x + 2$ avec $a = 0$ (b) $f(x) = x \ln x$ avec $a = +\infty$

(c) $f(x) = 1 - \ln x$ avec $a = 0$ (d) $f(x) = 2x \ln x$ avec $a = +\infty$

(e) $f(x) = x - \ln x$ avec $a = 0$ (f) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x+1}$ avec $a = 0$

Exercice 9

Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque $x \to a$:

(a) $f(x) = e^x + 2$ avec $a = -\infty$ (b) $f(x) = xe^{2x}$ avec $a = +\infty$

(c) $f(x) = 1 - e^{-x}$ avec $a = +\infty$

Exercice 10 (*Croissance comparée*)

Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque $x \to a$:

(a) $f(x) = x^3 e^x$ avec $a = -\infty$ (b) $f(x) = 2x \ln x$ avec $a = 0$

(c) $g(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$ avec $a = +\infty$ (d) $h(x) = \dfrac{e^x}{x}$ avec $a = +\infty$

5 Etude de fonctions

Exercice 11

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2\ln x - x$.

1. Calculer $f(1)$ et donner une valeur approchée de $f(2)$.
2. Calculer la dérivée $f'(x)$.
3. En déduire les variations de la fonction f.
4. Déterminer la limite de f en 0. Que peut-on en déduire pour la courbe de f ?
5. Montrer que $f(x) = x\left(\dfrac{2\ln x}{x} - 1\right)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$. En déduire la limite de f en $+\infty$.
6. Représenter graphiquement la courbe de f.

Exercice 12

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^{-x}$.

1. Déterminer $g(0)$, $g(-1)$ et $g(1)$.
2. Montrer que $g'(x) = (1-x)e^{-x}$.
3. En déduire les variations de la fonction g.
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0.
5. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe de g ?
6. Tracer la courbe représentative de la fonction g.