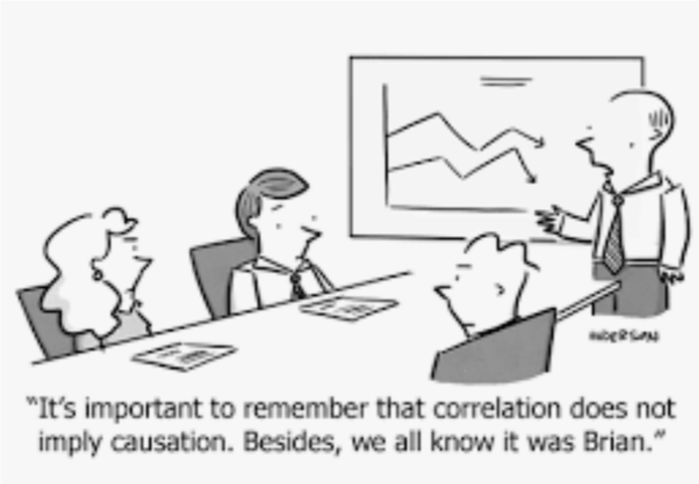
Probabilités : Variables aléatoires



1 Variable aléatoire

Définition

Ω étant un univers fini associé à une expérience aléatoire, on appelle *variable aléatoire* une fonction X de Ω dans $\mathbb{R}$.
Ainsi X associe à chaque issue de l'univers un nombre réel.

Définition

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'évènement noté $[X = x]$ est l'ensemble des issues qui ont pour image x par la fonction X.

Définition

Le support de X est l'ensemble des valeurs prises par X. On le note $X(\Omega)$

Définition

On appelle *loi de probabilité* de la variable aléatoire X la donnée de $P([X = x_i])$ pour chaque $x_i \in X(\Omega)$.

Définition

On appelle *espérance* de la variable aléatoire X le nombre $E(X) = \sum_i x_i P([X = x_i])$.

1$^{\text{er}}$ Exemple. On reprend le traditionnel lancer de deux dés pour lequel on note la différence entre les deux dés (le plus grand soustrait du plus petit)

- **Univers** : $\Omega = [\![1, 6]\!] \times [\![1, 6]\!]$

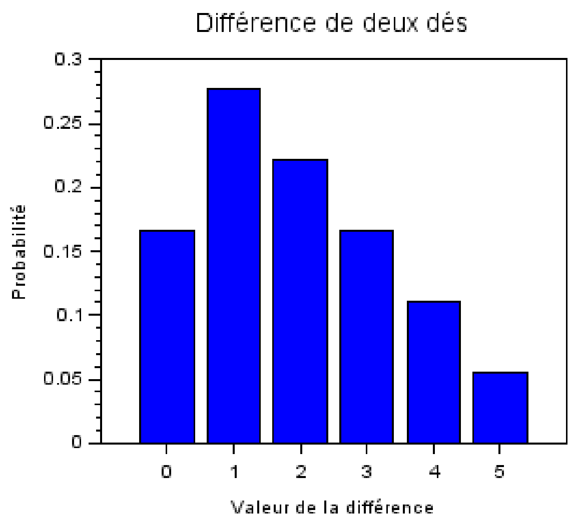
- **Variable aléatoire** : X est la variable aléatoire qui , à un lancer, associe la différence entre les deux dés. Ainsi $X((1,4)) = 3$ et $X((3,2)) = 1$.
- **Évènements** : Par exemple, $[X = 2] = \{(1,3),(3,1),(2,4),(4,2),(3,5),(5,3),(4,6),(6,4)\}$. Exercice : écrire l'évènement $[X \leq 1]$
- **Le support** : Les différences sont des nombres allant de 0 à 5.
- **La loi de probabilité** de X peut se présenter ici sous la forme d'un tableau :

x_i	0	1	2	3	4	5
$P([X = x_i])$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

- **L'espérance de X** :

$$E(X) = 0 \times \frac{6}{36} + 1 \times \frac{10}{36} + 2 \times \frac{8}{36} + 3 \times \frac{6}{36} + 4 \times \frac{4}{36} + 5 \times \frac{2}{36} = \frac{70}{36} = \frac{35}{18}$$

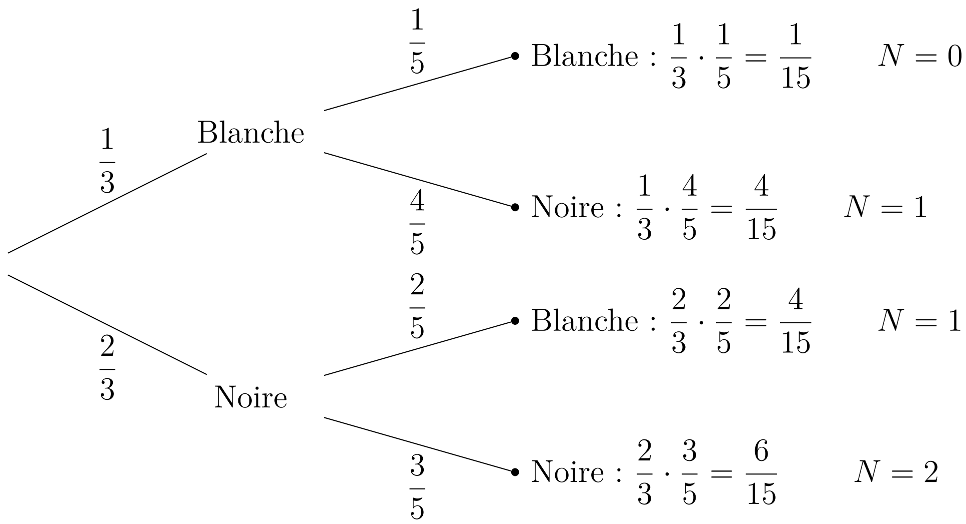
  Interprétation : On peut s'attendre à ce que la différence entre les deux dés soit en moyenne égale à $\frac{35}{18} \approx 1,94$ au centième près.
- **Diagramme en baton :**



2^{e} Exemple.

On tire au hasard deux boules simultanément dans une urne contenant 2 boules blanches et 4 boules noires indiscernables au toucher. On note N la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées.

Le mieux ici est de présenter sous la forme d'un arbre pondéré, en précisant au bout des branches la valeur prise par la variable aléatoire N.

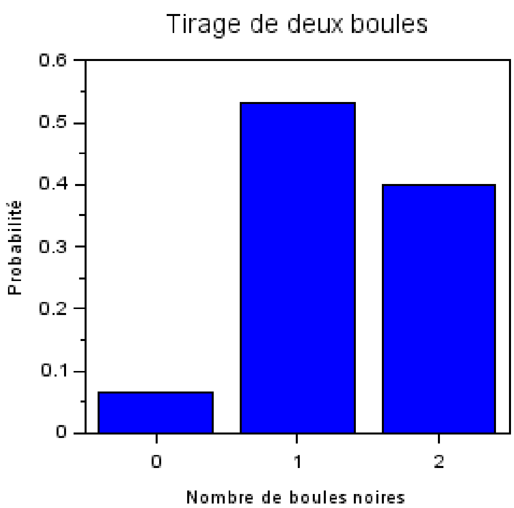


La loi de probabilité de N est :

n_i	0	1	2
$P([N = n_i])$	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{6}{15}$

L'espérance de N est $E(N) = 0 \times \frac{1}{15} + 1 \times \frac{8}{15} + 2 \times \frac{6}{15} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$.

On peut s'attendre à tirer en moyenne $\frac{4}{3}$ boule noire.



2 Fonction de répartition

Définition

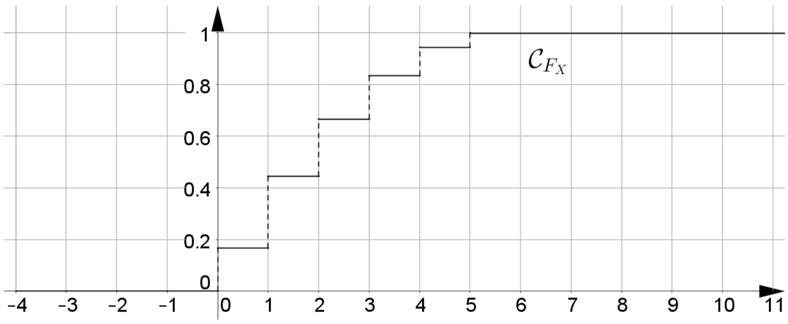
La fonction de répartition associée à une variable aléatoire X est la fonction notée F_X définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F_X(x) = P(X \leq x)$.

1^er^ Exemple.

Reprenons la variable aléatoire X ci-dessus. La probabilité qu'elle prenne une valeur strictement négative est nulle, donc pour tout $x < 0$, $F_X(x) = P([X \leq x]) = 0$.
La probabilité qu'elle prenne une valeur strictement inférieure à 1 est égale à $\dfrac{6}{36}$,
donc pour tout $x \in [0; 1[$, $F_X(x) = P(X \leq x) = \dfrac{6}{36}$.
La probabilité qu'elle prenne une valeur strictement inférieure à 2 est égale à $\dfrac{6}{36} + \dfrac{10}{36}$,
donc pour tout $x \in [1; 2[$, $F_X(x) = P(X \leq x) = \dfrac{16}{36}$.

De la même façon, $\begin{cases} \text{si } 3 \leq x < 4 & \text{alors } F_X(x) = \dfrac{24}{36} \\ \text{si } 4 \leq x < 5 & \text{alors } F_X(x) = \dfrac{30}{36} \\ \text{si } 5 \leq x & \text{alors } F_X(x) = 1 \end{cases}$

La courbe de la fonction de répartition F_X est la suivante :

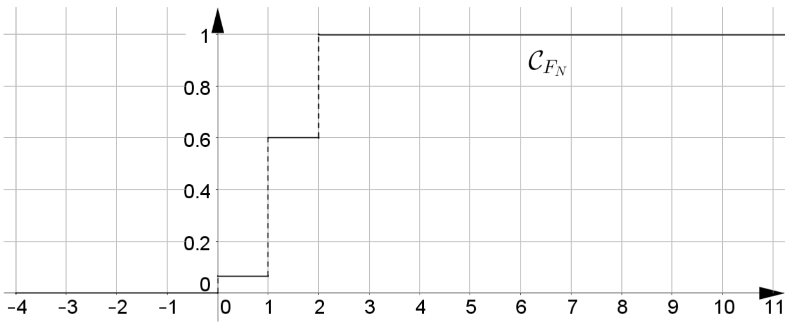


2^e^ Exemple.

La fonction de répartition de la variable aléatoire N du deuxième exemple est définie par :

$$\begin{cases} \text{Pour tout } x \in]-\infty; 0[, & F_N(x) = 0 \\ \text{Pour tout } x \in [0, 1[, & F_N(x) = \dfrac{1}{15} \\ \text{Pour tout } x \in [1; 2[, & F_N(x) = \dfrac{9}{15} \\ \text{Pour tout } x \in [2; +\infty[, & F_N(x) = 1 \end{cases}$$

La courbe représentative de la fonction F_N est la suivante :



3 Propriétés de l'espérance

Propriété de linéarité de l'espérance

Pour toute variable aléatoire X, et pour tout nombre réel a et b, $E(aX + b) = aE(X) + b$.

Exemple.

On lance un dé à six faces, et on note X la variable aléatoire égale au résultat du dé. On a $E(X) = 3,5$.

On mise 10 € et on gagne deux fois le résultat du dé. Quelle est l'espérance du gain ?

Le gain est égal à $2X - 10$ et $E(2X - 10) = 2E(X) - 10 = -3$. Le jeu n'est pas favorable.