Expérience de Bernoulli et loi binomiale

1 Épreuve de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui n'a que deux issues : le succès et l'échec. On note p la probabilité du succès et donc nécessairement la probabilité de l'échec est $1 - p$.

Issue	Échec	Succès
Probabilité	$1 - p$	p

Exemples :

1. On lance un dé et on considère que le succès est d'obtenir 6 : $p = \dfrac{1}{6}$.
2. On lance une pièce et on considère que le succès est d'obtenir pile : $p = \dfrac{1}{2} = 0,5$.

2 Variable aléatoire de Bernoulli

Sur l'univers Ω={succès, échec}, on peut définir une variable aléatoire X prenant la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec. Cette variable aléatoire suit une loi de Bernoulli. Elle a pour espérance p et pour variance pq.

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$1 - p$	p

3 Loi binomiale

La loi binomiale modélise le nombre de succès obtenus lors de la répétition indépendante de n épreuves de Bernoulli identiques. Si X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors X prend les valeurs entières de 0 à n, et pour tout k compris entre 0 et n, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.

En effet, une répétition ordonnée qui donne lieu à k succès a une probabilité égale à $p^k(1 - p)^{n-k}$. Pour compter le nombre de répétitions ordonnées qui donnent lieu à k succès, il faut choisir les k positions des succès. On note $\binom{n}{k}$ le nombre de parties à k éléments pris parmi n éléments. Ainsi $\boxed{P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}}$.

On a admis l'an dernier que $\boxed{\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n - k)!}}$.

4 En résumé

Loi de Bernoulli

Une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0;1]$ si X prend deux valeurs, 0 et 1, cette dernière avec la probabilité p. On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Espérance :	$E(X) = p$
Variance :	$V(X) = p(1-p)$

Loi binomiale

Une variable aléatoire suit une loi binomiale de paramètres p et n si elle prend pour valeurs les entiers de 1 à n et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Espérance :	$E(X) = np$
Variance :	$V(X) = np(1-p)$