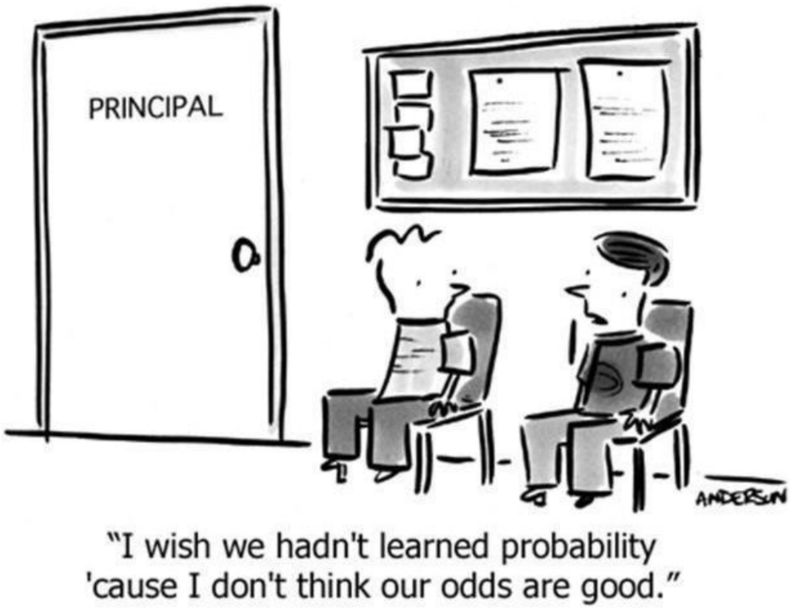
Probabilité 1 : Cours



1 L'idée de hasard et la notion de probabilité

Le *hasard* est une idée essentiellement abstraite. Elle tient à l'impossibilité d'identifier une cause précise à un évènement (comment se fait-il que le dé soit tombé sur 5 ?) ou au sentiment intime de son imprévisibilité (je ne pouvais pas prévoir qu'il allait tomber sur 5).

Cette idée s'oppose à celle de *déterminisme*, c'est à dire dire l'idée selon laquelle une cause précise entraine un effet certain. Par exemple si je lance exactement deux fois de suite un dé de la même manière, je devrai obtenir deux fois le même résultat. Pour autant cette expérience est difficilement réalisable, tant une modification, même très légère, entraîne une modification du résultat. En réalité dans cette expérience, notre capacité à prévoir le résultat est rendu presqu'impossible tant le problème est complexe.

La notion de probabilité constitue un modèle mathématique visant à quantifier le degré de vraisemblance d'un évènement (ma chance d'obtenir un 5 vaut $\frac{1}{6}$). Il y a deux façons principales de comprendre ce qu'est une probabilité. Soit l'on se fie à notre sentiment d'évidence : lorsque je lance un dé à six faces, il n'y a aucune raison qu'il tombe plutôt sur une face que sur une autre, par conséquent j'attribue la même probabilité à chacune des faces, c'est-à-dire $\frac{1}{6}$. Soit l'on constate une stabilisation des fréquences lorsqu'on reproduit l'expérience un grand nombre de fois : lorsque je lance le dé de façon répétée, la fréquence d'apparition de chaque face se rapproche progressivement de $\frac{1}{6}$.

2 Cadre mathématique

Il s'agit de construire un cadre mathématique à l'étude des probabilités et de définir le vocabulaire de référence.

Expérience aléatoire

L'étude des probabilités se fait toujours en rapport à une expérience aléatoire constituée d'une action suivie d'une observation que l'on ne peut prévoir à l'avance.

Exemple : On lance deux dés à 6 faces **et** on calcule la somme des deux faces apparentes.

Issue

Les issues sont les résultats possibles de l'observation.

Exemple : Ici 5 est une issue de l'expérience, car c'est un résultat possible obtenu par exemple avec le lancer $(2;3)$.

Univers

L'univers est l'ensemble de toutes les issues, c'est-à-dire de tous les résultats possibles. Il est noté en général Ω.

Exemple : Ici $\Omega = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

Évènement

Un évènement est un sous-ensemble de l'univers.

Exemple : L'évènement A : « Obtenir un nombre pair » désigne l'ensemble d'issues $\{2,4,6,8,10,12\}$.

Remarque : On peut, suite à une même action, opérer différentes observations. Ici, on pourrait relever la différence des deux dés par exemple. Autrement dit ce n'est pas le lancer qui détermine l'expérience aléatoire, mais aussi l'observation qui s'ensuit.

Réunion et intersection

Comme dans le cours sur les ensembles, on note

- $A \cup B$ la réunion des évènements A et B, c'est-à-dire la réunion des issues qui sont dans A et des issues qui sont dans B ;
- $A \cap B$ l'intersection des évènements A et B, c'est-à-dire l'ensemble des issues qui sont à la fois dans A et dans B.

Exemple : Considérons les évènements A : « Obtenir un nombre pair » et B : « Obtenir un nombre nombre inférieur ou égal à 6 ». On a $A = \{2,4,6,8,10,12\}$ et $B = \{2,3,4,5,6\}$.
$A \cup B$ est l'évènement : « Obtenir un nombre pair *ou* obtenir un nombre inférieur ou égal à 6 ».
$A \cup B = \{2,3,4,5,6,8,10,12\}$.
$A \cap B$ est l'évènement : « Obtenir un nombre pair *et* obtenir un nombre inférieur ou égal à 6 ».

$A \cap B = \{2, 4, 6\}$.

Évènement contraire

On appelle l'évènement contraire de A le complémentaire de A dans l'univers Ω. On le note $\overline{A}$.

Exemple : Si A : « Obtenir un nombre pair » alors $\overline{A}$: « Obtenir un nombre impair ».

Évènements incompatibles

Deux évènements A et B sont dits incompatibles si leur intersection est vide. On note $A \cap B = \emptyset$

Exemple : les évènements A : « Obtenir un nombre pair » et B : « Obtenir la somme 5 »sont incompatibles.

Probabilité

Une probabilité est une application P définie sur l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω et à valeurs dans l'intervalle [0 ;1] vérifiant :

— $P(\Omega) = 1$

— Pour tous A et B incompatibles de $\mathcal{P}(\Omega)$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Équiprobabilité

On parle d'équiprobabilité lorsque toutes les issues ont la même probabilité. Dans ce cas, et dans ce cas seulement, la probabilité d'un évènement A est toujours égale à :

$$P(A) = \frac{\text{Nombre d'issues favorables}}{\text{Nombre total d'issues}} = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$$

Dans l'exemple développé depuis le début, les issues n'ont pas toutes la même probabilité : la somme 6 est plus probable que la somme 2, qui ne peut être obtenue qu'avec un double 1. Pour calculer des probabilités dans cette situation, il faut changer d'expérience aléatoire. Il s'agit toujours de lancer deux dés, bien sûr, mais cette fois on relève dans l'ordre les deux faces apparentes.

L'univers est désormais : Ω ={(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}.

Comme nous l'avons vu dans le cours sur les ensembles, il est bien plus commode de noter cet univers $\boxed{\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \times \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}}$

Les trente-six issues sont bien équiprobables, et l'on peut donc calculer des probabilités en utilisant l'expression ci-dessus. Prenons par exemple l'évènement A : « Obtenir la somme

6 ». $A = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$ et donc $P(A) = \dfrac{5}{36}$.

2.1 Formules du crible

Formule du crible pour deux évènements

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Conseil pour mémoriser cette formule : On peut se souvenir de la présentation en diagramme suivante :

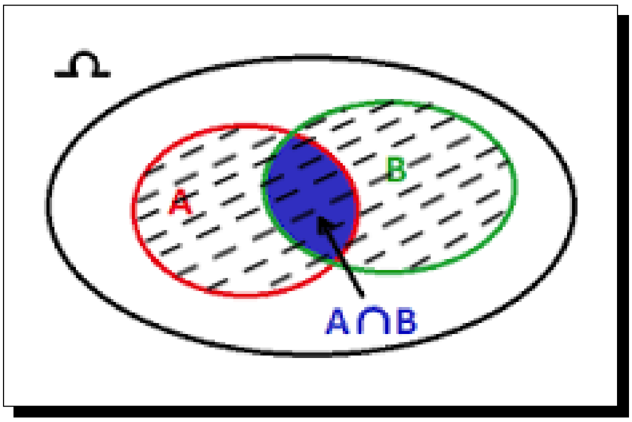


Figure 1 – La formule du crible

Sur cette figure, le calcul de la probabilité est analogue à celle d'une aire :

1. L'aire hachurée est l'aire de $A \cup B$
2. Pour calculer cette aire, on fait l'aire de A plus l'aire de B
3. Mais ce faisant, on a compté l'aire bleue ($A \cap B$) deux fois, il faut donc la retrancher une fois.

2.2 Formule des probabilités totales

Partition

Une partition de l'univers Ω en n sous-ensembles est la donnée de n ensembles d'évènements A_1, A_2, . . ., A_n **disjoints** et dont la réunion est Ω. C'est à dire que l'on doit avoir :

— Pour tout indice i et j distincts, $A_i \cap A_j = \emptyset$

— $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$

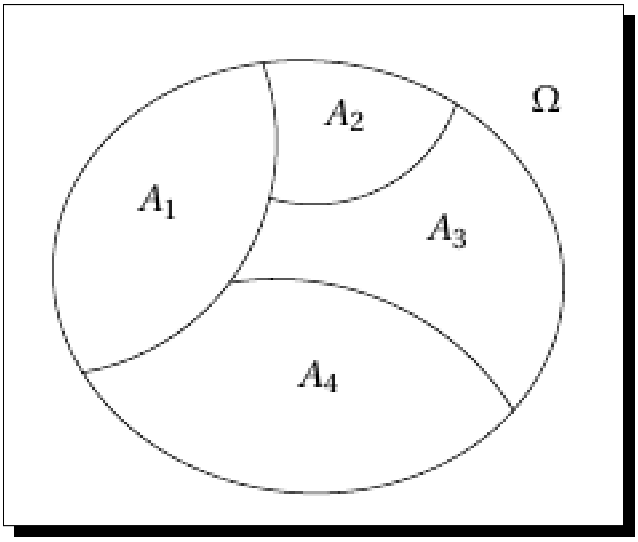


FIGURE 2 – Exemple d'une partition en quatre évènements

Formule des probabilités totales

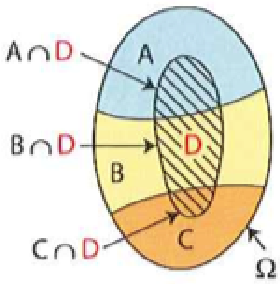
Étant donnée une partition $(A_1, A_2, \ldots A_n)$ de l'univers Ω et un évènement B quelconque on a :

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) \\ &= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_n) \end{aligned}$$

Dans le cas particulier d'une partition de l'univers en trois évènements A, B et C, la formule ci-dessus devient, pour un évènement D,

$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D)$$

et peut être représentée par la figure suivante :



Exemple : Dans un collège, trois sports sont proposés par l'association sportive : le Rugby, l'Athlétisme, et le Tennis de table. Les filles qui pratiquent le rugby représentent 12% des inscrits, les filles qui pratiquent l'athlétisme 15% des inscrits, et les filles qui pratiquent le tennis de table 25% des inscrits. On choisit au hasard un élève inscrit à l'association sportive. Quelle est la probabilité que cet élève soit une fille ?
On note :

— F l'évènement : « L'élève est une fille ».

— R l'évènement : « L'élève est inscrit au rugby ».

— A l'évènement : « L'élève est inscrit en athlétisme ».

— T l'évènement : « L'élève est inscrit au tennis de table ».

Les évènements S, A et T forment une partition de l'univers de tous les élèves inscrits à l'A.S.
Donc $P(F) = P(F \cap R) + P(F \cap A) + P(F \cap T) = 0,12 + 0,15 + 0,25 = 0,52$.
La probabilité que l'élève soit une fille est 0,52.

3 Probabilités conditionnelles

Définition

On parle de probabilité conditionnelle lorsqu'on s'intéresse à la probabilité d'un évènement A *sachant* qu'un autre évènement B s'est produit.
On note $\mathbf{P_B(A)}$ cette probabilité.

Formule de la probabilité conditionnelle

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Preuve sur un exemple :

Quelle est la probabilité de l'évènement A : « La somme des deux dés est supérieure ou égale à 10 » *sachant* que l'évènement B : « Un des deux dé affiche 6 » est réalisé ? Certaines issues sont supprimées de la liste :

{~~(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5)~~, (1,6), ~~(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5)~~, (2,6), ~~(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5)~~, (3,6), ~~(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5)~~, (4,6), ~~(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5)~~, (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

L'univers a changé. Il s'agit maintenant de :
$\Omega' = B =$ {(1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}
Les issues favorables constituent l'évènement $A \cap B$={(4,6),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)}.

La probabilité d'un évènement *sachant* B s'applique aux évènements de ce nouvel univers et s'écrit P_B. Ici,

$$P_B(A) = \frac{\text{card } A \cap B}{\text{card } B} = \frac{5}{11}$$

Nous pouvions en fait directement appliquer la formule connue :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{qui s'écrit aussi} \quad P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B) \tag{1}$$

3.1 Formule de Bayes

Le théorème de Bayes permet de relier $P_B(A)$ et $P_A(B)$. Elle s'utilise lorsque on cherche à calculer la probabilité d'un évènement A sachant B alors que l'on connait l'inverse, c'est à dire la probabilité de B sachant A.

Formule de Bayes

$$P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)}$$

La démonstration est immédiate : $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P_A(B)P(A)}{P(B)}$

Exemple sur un exercice :

Exemple d'exercice à savoir refaire par coeur

Une entreprise fabrique en grande quantité des médailles circulaires. La totalité de la production est réalisée par deux machines M_A et M_B.
La machine M_A fournit 40% de la production totale et M_B le reste.
La machine M_A produit 2% de médailles défectueuses et la machine M_B produit 3% de médailles défectueuses.
On prélève au hasard une médaille produite par l'entreprise et on constate qu'elle est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de la machine M_A ?

Pour simplifier les notations on note A, B, D les évènements suivants :

— A : « la médaille provient de la machine M_A »

— B : « la médaille provient de la machine M_B »

— D : « la médaille est défectueuse »

Analyse : L'exercice demande de calculer $P_D(A)$. Or je connais $P_A(D) = 0,02$, c'est donc un exercice où l'on utilise la formule de Bayes :

$$P_D(A) = \frac{P_A(D)P(A)}{P(D)}$$

Je ne connais pas $P(D)$ mais je peux calculer ce nombre inconnu à l'aide de la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D \cap A) + P(D \cap B) \\ &= P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D) \\ &= 0,4 \times 0,02 + 0,6 \times 0,03 = 0,026 \end{aligned}$$

Je peux alors conclure :

$$\boxed{P_D(A) = \frac{P_A(D)P(A)}{P(D)} = \frac{0,02 \times 0,4}{0,026} = \frac{4}{13} \simeq 0,30 \text{ au centième près.}}$$

4 Indépendance en probabilité

4.1 Indépendance de 2 évènements

Dans le langage courant, on parle d'évènements indépendants lorsque la réalisation de l'un est sans incidence sur la probabilité de l'autre.

Par exemple, le fait qu'il pleuve et le fait que le numéro 12 soit sorti au loto peuvent être pensés comme des évènements indépendants.

Il ne faut cependant pas confondre l'indépendance et l'incompatibilité !

Définition de l'indépendance de deux évènements

On dit que deux évènements sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Cette formule nous permet de constater que cette définition formelle rejoint bien la compréhension intuitive de l'indépendance décrite ci-dessus, puisque, dès lors que $P(A) \neq 0$ les propositions suivantes sont équivalentes :

$$A \text{ et } B \text{ indépendants} \quad \Leftrightarrow \quad P(B) = P_A(B)$$

4.2 Indépendance de n évènements

Définition

On dira que n évènements sont mutuellement indépendants si ils sont indépendants deux à deux.

Propriété

Lorsque n évènements (A_i) sont mutuellement indépendants, il en va de même pour les évènement (B_i) où pour tout i, soit $B_i = A_i$ soit $B_i = \overline{A_i}$.