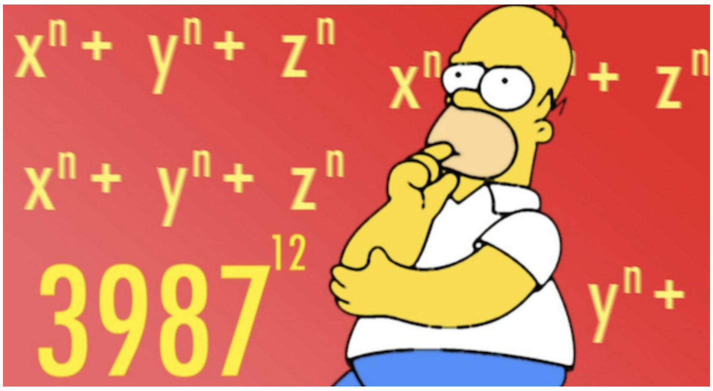
Bases de calculs nécessaires pour la Prépa ECT



1 Calculs numériques

1.1 Différents types de nombres

- Les nombres entiers permettent d'abord de dénombrer des collections. C'est dans ce contexte qu'ils apparaissent vers 4 000 av. J.C.
- Les fractions permettent :
  - — d'exprimer le résultat d'un partage.

    Si je partage 2 L. d'eau équitablement entre cinq verres, chaque verre contient $\frac{2}{5}$ L.
  - — de mesurer des grandeurs.

    En fractionnant l'unité, on améliore la précision des mesures.
  - — d'exprimer des rapports / des proportions.

    Mélange A : deux verres de lait et un verre de chocolat. Il contient $\frac{1}{3}$ de chocolat.

    Mélange B : trois verres de lait et deux verres de chocolat. Il contient $\frac{2}{5}$ de chocolat.

    Le mélange B est plus chocolaté car $\frac{2}{5} > \frac{1}{3}$.

L'écriture décimale des nombres apparaît de façon relativement tardive. Elle est défendue par Simon Stévin à la fin du XVI^{e} s., mais son usage se généralise seulement au XIX^{e} siècle en lien avec l'usage du système métrique enseigné dans les écoles.

Ainsi une fraction décimale comme $31 + \frac{7}{10} + \frac{4}{100}$ est écrite 31,74.

Qu'en est-il de l'écriture décimale des autres fractions ? On a $\frac{1}{4} = 0,25$ mais quid de $\frac{1}{9}$? de $\frac{1}{7}$?

Les fractions n'ont pas toutes un développement décimal fini, elles ont toutes un développement décimal périodique. Ainsi, $\frac{1}{9} = 0,11111\ldots$ et $\frac{1}{7} = 0,142857142857142857\ldots$.

Une surprise : les nombres décimaux, dont l'écriture décimale est finie, possèdent deux écritures décimales possibles, comme $1 = 0,9999\ldots$ ou $2,5 = 2,49999\ldots$.

Certains nombres ne s'écrivent pas sous forme fractionnaire, comme par exemple $\sqrt{2}$ ou π. Ces nombres sont dits irrationnels. Leur développement décimal n'est pas périodique. Par exemple :

$$\sqrt{2} = 414213562373095\ldots \text{ et } \pi = 3,14159265359\ldots$$

Enfin, les nombres négatifs ont posé d'importantes difficultés aux mathématiciens (et aux élèves aujourd'hui !). Il est courant d'estimer que la notion de nombre négatif est née de besoins comptables (gains et dettes) et sont apparus chez les chinois (1er siècle) et indiens (6ème siècle), mais il n'est pas du tout évident :

- de les considérer comme des « nombres » ;
- de les comparer aux autres nombres déjà existants, notamment le zéro ($-2 < 0$)

Leur acceptation fût lente et ils ont été définitivement acceptés au XIX^{e} siècle.

Notations

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$;
$\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs : $\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$;
$\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels : $\mathbb{Q} = \{0, 2, -5, \frac{2}{3}, -\frac{12}{5}, \frac{7\,329}{677}, \ldots\}$;
$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels, c'est-à-dire de tous les nombres que nous utiliserons ensemble.

1.2 Propriétés des opérations

Cinq propriétés

L'addition est commutative : pour tout nombre a, b, $a + b = b + a$.
L'addition est associative : pour tout nombre a, b, c, $(a + b) + c = a + (b + c)$.
La multiplication est commutative : pour tout nombre a, b, $a \times b = b \times a$.
La multiplication est associative : pour tout nombre a, b, $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.
La multiplication est distributive par rapport à l'addition :
pour tout nombre a, b, c, $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.

A l'aide de ces 5 propriétés, on peut démontrer une 6ème. Démontrer signifie : donner une série d'argument pour convaincre autrui de la véracité de son affirmation.

Double distributivité

Si a, b, c, d sont quatre nombres réels alors

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Démonstration : en classe avec les 5 propriétés précédentes.

1.3 Puissance

Propriétés des puissances

Pour tout nombre réel x et pour tout entier naturel n, $x^n = x \times x \times x \times \ldots \times x$ (n facteurs).

Pour tout nombre réel x non nul, et pour tout entier naturel n, $x^{-n} = \dfrac{1}{x \times x \times x \times \ldots \times x}$.

Exemples.

$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16 \qquad 10^5 = 100\,000 \qquad 10^{-4} = 0,000\,1.$

Propriétés

Pour tout nombre réel x et y, et pour tout entier relatif n, $(x \times y)^n = x^n \times y^n$ et $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$.

Pour tout nombre réel x, et pour tout entiers relatifs n et m, $x^n \times x^m = x^{n+m}$ et $\dfrac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$.

Démonstration sur quelques valeurs simples de n et m

1.4 Racine carrée

Racine carrée

La racine carrée d'un nombre réel positif x est le nombre dont le carré vaut x. Il est noté $\sqrt{x}$.

Exemple.

$\sqrt{4} = 2$ car le carré de 2 est 4.

$\sqrt{0,01} = 0,1$ car le carré de 0,1 est 0,01.

Remarque. La plupart des nombres ont une racine carrée qui n'est pas un nombre décimal. Dans ce cas, il est plus simple de conserver la notation $\sqrt{x}$. C'est le cas par exemple pour $\sqrt{2}$.

Propriétés

Pour tous nombres réels positifs x et y :

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$$

$$\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

Démonstration de la première propriété en classe.

Exemple. $\sqrt{56} = \sqrt{2 \times 4 \times 9} = \sqrt{2} \times \sqrt{4} \times \sqrt{9} = \sqrt{2} \times 2 \times 3 = 6\sqrt{2}$.
Attention. Il n'existe pas de propriété générale permettant de simplifier $\sqrt{x+y}$.

2 Calcul littéral

Pour résoudre des équations, mais aussi pour étudier des fonctions, il est nécessaire de savoir effectuer du calcul littéral, c'est-à-dire calculer avec des lettres qui désignent des objets mathématiques dont on ignore la valeur.
Ces objets sont souvent des nombres, mais cela peut-être tout autre objet mathématique dont on connaît la définition : fonctions, suites, polynômes, matrices...

Lorsque la lettre représente un nombre générique, c'est-à-dire représentant toutes les nombres possibles on peut écrire des égalités vraies pour toute valeur de la lettre.

Exemple : La relation $x(x+1) = x^2 + x$ est vraie pour toute valeur possible du nombre réel x.

2.1 Identités remarquables

Certaines factorisations doivent être sues par cœur. C'est le cas des trois identités dites remarquables :

Identités remarquables

Pour tous nombres réels a, b :

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Exemple : cf TD.

2.2 Développement et factorisation

Développer c'est transformer un produit en une somme :

$$2x(x-4) = 2x^2 - 4x \quad \text{ou} \quad (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$$

Pour développer, on suit toujours la même procédure.

Factoriser c'est transformer une somme en un produit :
$3x - x^2 = \underline{x} \times 3 - \underline{x} \times x = \underline{x}(3 - x)$, ou $(x+1)(1-2x) + (x+1)x = (x+1)(1-2x+x)$.
Factoriser peut s'avérer difficile : on essaie les procédures suivantes dans l'ordre :

1. Identifier un facteur commun ;
2. Reconnaître une identité remarquable.

3 Résolution d'équations à une inconnue

3.1 Équations

La lettre peut représenter l'inconnue.

Résoudre l'équation $3x + 1 = -x - 1$, c'est chercher toutes les valeurs de x qui réalisent l'égalité. Ici, il y en a une seule, c'est $-\frac{1}{2}$. Il peut n'y en avoir aucune, comme c'est le cas avec l'équation $x^2 + 1 = 0$. Il peut y en avoir plusieurs, comme c'est le cas avec l'équation $x^3 - x = 0$, dont les solutions sont -1, 0 et 1.

Résoudre une équation permet de trouver tous les nombres qui vérifient une égalité.
Par exemple, les 15 élèves de la classe de ECT1 veulent distribuer 5 000 tracts en faveur du mouvement *Nuit debout*. Les professeurs décident de les aider en distribuant 1 400 tracts. Combien les étudiants doivent-ils alors en distribuer chacun ?

On note x le nombre de tracts que chaque étudiant devra distribuer.

$$\begin{array}{llll} & 15 \times x + 1\,400 & & = 5\,000 \\ \Leftrightarrow & 15 \times x + 1\,400 & -1\,400 & = 5\,000 \quad -1\,400 \\ \Leftrightarrow & 15 \times x & & = 3\,600 \\ \Leftrightarrow & 15 \times x & \div 15 & = 3\,600 \quad \div 15 \\ \Leftrightarrow & x & & = 240 \end{array}$$

Chaque étudiant devra distribuer 240 tracts.

3.2 Inéquations

Résoudre une inéquation permet de trouver tous les nombres qui vérifient une inégalité.
Les photocopies de la bibliothèque Bernheim coûtent 20 XPF l'unité. Au cybercafé, il faut payer une carte 1 000 XPF puis les copies coûtent 10 XPF l'unité. À partir de combien de photocopies le choix du cybercafé est-il plus avantageux ?

On note p le nombre de photocopies.

$$\begin{array}{lllll} & 20p & & \geq & 1\,000 + 10p \\ \Leftrightarrow & 20p & -10p & \geq & 1\,000 + 10p \quad -10p \\ \Leftrightarrow & 10p & & \geq & 1\,000 \\ \Leftrightarrow & 10p & \div 10 & \geq & 1\,000 \qquad \div 10 \\ \Leftrightarrow & p & & \geq & 100 \end{array}$$

Les solutions de l'équation sont tous les nombres de l'intervalle $[100; +\infty[$.
À partir de 100 photocopies, le choix du cybercafé est plus avantageux.

4 Polynômes

4.1 Définitions et premiers théorèmes

Polynôme

On appelle polynôme une expression littérale de la forme $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}a_nx^n$.
n est le degré du polynôme, et les nombres a_i sont les coefficients du polynôme.

Exemple. $P = x^2 - 3x + 5$ est un polynôme de degré 2. $Q = x^4 - 2x$ est un polynôme de degré 4.

Définition

P étant un polynôme, on appelle racine de P tout nombre réel a tel que $P(a) = 0$.

Exemple. Soit le polynôme $P = x^2 + 5x - 6$. $P(1) = P(-6) = 0$, donc 1 et -6 sont des racines de P.

Théorème

Si a est une racine d'un polynôme P, alors on peut factoriser P par $(x - a)$.
Un polynôme de degré n a au plus n racines.

Exemple. Soit $P = x^3 - 1$. $P(1) = 0$, donc P peut être factorisé par $(x - 1)$. En effet, $P = (x - 1)(x^2 + x + 1)$.

4.2 Les polynômes du premier degré

Les polynômes du premiers degré sont de la forme $P = ax+b$, où a et b sont deux nombres réels quelconques, avec $a \neq 0$.

Le signe d'un tel polynôme dépend du signe de a :

si $a > 0$,

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax + b$		$-$	0	$+$	

et si $a < 0$,

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax + b$		$+$	0	$-$	

4.3 Le trinôme du second degré

Les polynômes du second degré, aussi appelés trinômes, sont de la forme $ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont trois nombres réels quelconques, avec $a \neq 0$.

Les racines et le signe d'un tel trinôme sont déduits d'une transformation d'écriture :

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left((x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right) = a\left((x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$$

Propriété fondamentale

On note Δ et on appelle discriminant du trinôme le nombre $\Delta = b^2-4ac$.
Si $\Delta < 0$, le trinôme n'a aucune racine réelle et son signe est celui de a ;
Si $\Delta = 0$, le trinôme a pour unique racine réelle $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Il se factorise sous la forme $a(x-x_0)^2$ et il est du signe de a ;
Si $\Delta > 0$, le trinôme a deux racines réelles $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. Il se factorise sous la forme $a(x-x_1)(x-x_2)$ et il est du signe de a à l'extérieur des racines :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a