Devoir maison confinement : correction

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On définit également trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) par leurs premiers termes $u_0 = v_0 = w_0 = 0$ et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} & = 4u_n - 3v_n - 2w_n + 1 \\ v_{n+1} & = 2u_n - v_n - 2w_n + 2 \\ w_{n+1} & = -u_n + v_n + 3w_n - 3 \end{cases}$$

A Puissances successives de la matrice A

Soit $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

1. *Montrer que $\alpha = 1$ est une racine évidente de P et en déduire une factorisation de P sous la forme $(x-\alpha)(ax^2+bx+c)$.*
   On calcule $P(1) = 0$, donc 1 est bien une racine de P.
   D'après le cours, P admet une factorisation de la forme $(x-1)(ax^2+bx+c)$.
   On développe :
   $$\begin{aligned} (x-1)(ax^2+bx+c) &= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\ &= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c \end{aligned}$$
   On identifie à $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, ce qui donne : $\begin{cases} a = & 1 \\ b-a = & -6 \\ c-b = & 11 \\ -c = & -6 \end{cases}$.
   Donc $\boxed{a=1}$, $\boxed{b = -6+a = -6+1 = -5}$, $\boxed{c=6}$.
   On vérifie au passage que l'on a bien $c - b = 6 - (-5) = 6 + 5 = 11$.
   Finalement $\boxed{P(x) = (x-1)(x^2-5x+6)}$
2. *En déduire l'ensemble des racines de P.*
   On a déjà obtenu que 1 est une racine, il reste à résoudre $x^2 - 5x + 6 = 0$.
   On trouve $\Delta = 1$ et $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$.
   Finalement $\boxed{\text{les racines de } P \text{ sont } 1,\ 2 \text{ et } 3.}$
3. *Montrer que P est un polynôme annulateur de A . En déduire les valeurs propres possibles de la matrice A.*
   Calculons $P(A) = A^3 - 6A^2 + 11A - 6I$
   $A^2 = \begin{pmatrix} 12 & -11 & -8 \\ 8 & -7 & -8 \\ -5 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 34 & -33 & -26 \\ 26 & -25 & -26 \\ -19 & 19 & 27 \end{pmatrix}$
   Après calcul, on trouve bien $A^3 - 6A^2 + 11A - 6I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. *Vérifier que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est obtenue en juxtaposant trois vecteurs-colonnes qui sont vecteurs propres de A. Préciser pour chacun la valeur propre correspondante.*

   On calcule $A.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et on obtient :

   - $A.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1 ;
   - $A.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 2 ;
   - $A.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = 3.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 3.

5. *En utilisant `Scilab` ou https://www.dcode.fr/matrix-inverse, donner l'expression de P^{-1}.*

   On obtient : $P^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$

6. *Vérifier que la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ satisfait la relation $AP = PD$ et en déduire l'expression de A en fonction des matrices P, D et P^{-1}.*

   Première solution (plus longue car calculatoire) : Après calcul (à détailler si on opte pour cette solution)

   - $AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$
   - $PD = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

   Donc on a bien $\boxed{AP = PD}$.

   Deuxième solution (plus courte) : On invoque le cours. Puisque la matrice A admet trois valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable. La matrice D donnée dans le texte est bien la matrice du cours, puisque les trois valeurs propres sont 1, 2 et 3. Ceci permet d'affirmer directement que $\boxed{AP = PD}$

   Comme déjà fait dans le cours on obtient ensuite : $\boxed{A = PDP^{-1}}$

7. *Exprimer A^n en fonction de P, P^{-1} et D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

   D'après le cours, on a $\boxed{A^n = PD^nP^{-1}}$

8. *Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.* On sait, d'après le cours, que puisque D est une matrice diagonale, on a $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$
(On se sert du fait que $1^n = 1$!!)
Ensuite on calcule, en deux temps PD^nP^{-1}. Sans détailler les calculs, voici ce que l'on trouve :

   - $PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^n & 3^n \\ 1 & 0 & 3^n \\ 0 & 2^n & -3^n \end{pmatrix}$
   - Puis $PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2^n & 3^n \\ 1 & 0 & 3^n \\ 0 & 2^n & -3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n + 3^n - 1 & -2^n - 3^n + 2 & 1 - 3^n \\ 3^n - 1 & 2 - 3^n & 1 - 3^n \\ 2^n - 3^n & -2^n + 3^n & 3^n \end{pmatrix}$

   Conclusion :

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 2^n + 3^n - 1 & -2^n - 3^n + 2 & 1 - 3^n \\ 3^n - 1 & 2 - 3^n & 1 - 3^n \\ 2^n - 3^n & -2^n + 3^n & 3^n \end{pmatrix}}$$

B Obtention de l'expression des termes des trois suites récurrentes

9. *Vérifier que l'on a la relation : $C = AC + B$.*
C'est un calcul, on vérifie que $AC + B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ est bien égal à $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

10. *On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n + B$.*
C'est une question très classique dès lors que l'on introduit trois suites.
Il ne faut pas perdre de vue que l'on a la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} & = 4u_n - 3v_n - 2w_n + 1 \\ v_{n+1} & = 2u_n - v_n - 2w_n + 2 \\ w_{n+1} & = -u_n + v_n + 3w_n - 3 \end{cases}$$

Tout d'abord il faut bien comprendre que l'on a $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix}$

On calcule ensuite

$$\begin{aligned}
AX_n + B &= \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4u_n - 3v_n - 2w_n \\ 2u_n - v_n - 2w_n \\ -u_n + v_n + 3w_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4u_n - 3v_n - 2w_n + 1 \\ 2u_n - v_n - 2w_n + 2 \\ -u_n + v_n + 3w_n - 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} \quad \square
\end{aligned}$$

11. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = C - A^n C$.*
   Cette question est plus difficile, car elle demande une prise d'initiative : celle de démontrer la relation **par récurrence**.

   Initialisation : Pour $n = 0$ la relation est vraie, car X_0 est bien égal à $C - A^0.C$. En effet, il ne faut pas perdre de vue les données du texte $u_0 = v_0 = w_0 = 0$. Donc $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ d'une part.

   D'autre part $C - A^0.C = C - I.C = C - C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ puisque $I.C = C$ (multiplication par l'identité).

   Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

   On suppose que la propriété est vraie au rang n, c'est à dire que $X_n = C - A^n C$ (**acquis**).
   On doit démontrer la propriété au rang $n+1$, c'est à dire $X_{n+1} = C - A^{n+1} C$ (**à démontrer**).
   Pour démontrer ce point il faut mobiliser deux résultats des questions précédentes :

   - $C = AC + B$, donc $B = C - AC$ d'une part
   - $X_{n+1} = AX_n + B$, d'autre part.

   Partons ce cette dernière relation :

$$\begin{aligned}
X_{n+1} &= AX_n + B \\
&= AX_n + C - AC \quad \text{car } B = C - AC \\
&= A.(C - A^n C) + C - AC \quad \text{car } X_n = C - A^n C \text{ par hypothèse de récurrence} \\
&= AC - A^{n+1} C + C - AC \\
&= C - A^{n+1} C \quad \square
\end{aligned}$$

   Conclusion : La propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

12. *En déduire les expressions de u_n, v_n, w_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.*
On doit ici mobiliser cette nouvelle relation ainsi que l'expression de A^n trouvée dans la première partie.

$$\begin{aligned}
X_n &= C - A^n C \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2^n + 3^n - 1 & -2^n - 3^n + 2 & 1 - 3^n \\ 3^n - 1 & 2 - 3^n & 1 - 3^n \\ 2^n - 3^n & -2^n + 3^n & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2^n - 3^n + 1 \\ 1 - 3^n \\ 2^n + 3^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2^n + 3^n \\ 3^n - 1 \\ -2^n - 3^n + 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Puisque $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ on en déduit que

$$\boxed{\begin{cases} u_n = & -2^n + 3^n \\ v_n = & 3^n - 1 \\ w_n = & -2^n - 3^n + 2 \end{cases}}$$

Remarque : il est judicieux de faire un petit test pour $n = 0$ pour vérifier que l'on retrouve bien les valeurs donnée par le texte.

C'est le cas car $\boxed{\begin{cases} u_0 = & -2^0 + 3^0 = -1 + 1 = 0 \\ v_0 = & 3^0 - 1 = 1 - 1 = 0 \\ w_0 = & -2^0 - 3^0 + 2 = -1 - 1 + 2 = 0 \end{cases}}$