Matrices 1 : Exercices

1 Généralités, additions de matrices

Exercice 1

Donner un exemple de matrice de $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et une autre de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$

Exercice 2

Ecrire les matrices 3×3 dont le terme général est donné par les formules :
$a_{ij} = i + j$; $\quad b_{ij} = i \times j$; $\quad c_{ij} = 2^{i-j}$.

Exercice 3

Compléter : $\begin{pmatrix} 2 & ... \\ ... & 3,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4,2 & 1 \\ 5,1 & ... \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ... & -2 \\ 8,3 & 6,1 \end{pmatrix}$

Exercice 4

Trouver deux matrices A et B telles que $A - B = \begin{pmatrix} 4 & -1,5 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 5

Soit $A = \begin{pmatrix} 2,2 & 3,5 & -5 \\ 0,3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Écrire la matrice $B = {}^tA$ et la matrice $C = {}^tB$. Que peut-on remarquer ?
2. Ecrire la matrice $D = 3A$ et la matrice $E = -2A$.

2 Multiplications de matrices

Exercice 6

Trouver les coefficients manquants dans le calcul : $\begin{pmatrix} 2 & \dots \\ 0,5 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -14 \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$

Exercice 7

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer $A \times B \times C$.

Exercice 8

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Trouver une matrice B telle que $A \times B = \begin{pmatrix} -12 & 5 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$
2. Calculer $B \times A$. A et B commutent-elles ?

Exercice 9

Soient $A = \begin{pmatrix} 2,5 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 2 \\ -0,5 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & -2,5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Calculer $A \times B$.

‘

Exercice 10

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et A^3.

Exercice 11

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 4,1 & -3 & 0 \\ 7,1 & 3 & 12,5 & -14 \\ -2 & 6,5 & -5 & 21 \\ -10 & 0,25 & 12 & 4 \end{pmatrix}$

Calculer $\sum_{i=1}^{4} a_{i2}$ et $\sum_{j=1}^{4} a_{3j}$.

Exercice 12

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0,5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer $B = A + 2I$.
2. Calculer AB.
3. Calculer $D = A^2 + 2A$. Comparer avec le résultat de la question 2.

3 Inverses de matrices

Exercice 13

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. L'une des matrices suivantes est-elle l'inverse de A : ?

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 14

Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 2 & 6 & -6 \\ -4 & -6 & 10 \end{pmatrix}$

1. Calculer AB. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.
2. Calculer CD. En déduire que D est inversible et donner D^{-1}.

Exercice 15

Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 2A - 8I$.
2. En déduire, sans calcul, que $A^2 = 2.A + 8.I$, puis que $A^3 = 12A + 16I$
3. Démontrer par récurrence qu'il existe deux suites de nombres réels (a_n) et (b_n) telles que, pour tout entier naturel n, $A^n = a_n A + b_n I$. On précisera les premiers termes de ces suites, ainsi que a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 4a_n + b_n$ et $v_n = -2a_n + b_n$. Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont géométriques. Calculer leurs termes généraux en fonction de n. En déduire les termes généraux des suites (a_n) et (b_n).
5. En déduire A^n, pour n appartenant à $\mathbb{N}$.

Exercice 16

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -10 \\ 2 & -5 & 10 \\ 2 & -6 & 11 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 4A$, en déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.