

1 Opérations entre matrices

Exercice 1 (*Transposée, multiplication par un nombre*)

Soit $A = \begin{pmatrix} 2,2 & 3,5 & -5 \\ 0,3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Écrire la matrice $B = {}^tA$ et la matrice $C = {}^tB$. Que peut-on remarquer ?
2. Ecrire la matrice $D = 3A$ et la matrice $E = -2A$.

Exercice 2

Soient $A = \begin{pmatrix} 2,5 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 2 \\ -0,5 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & -2,5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Calculer $A \times B$.

Exercice 3 (*Puissances*)

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et A^3 .

Exercice 4 (*Tout type d'opération*)

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Calculer :

- | | | | |
|---------------------------|------------------------|----------------------|--------------------------|
| (a) $A + 2B$ | (b) $3A - 2B + 4{}^tC$ | (c) $A + B \times C$ | (d) $(A - I_2)(B - I_2)$ |
| (e) $A \times B \times C$ | (f) A^2 | (g) $A^2 - 3A$ | (h) $A(A - 3I_2)$ |

Exercice 5

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0,5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ Calculer $B = A + 2I$, AB et $D = A^2 + 2A$. Comparer

Exercice 6

Trouver les coefficients manquants dans le calcul : $\begin{pmatrix} 2 & \dots \\ 0,5 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -14 \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$

Exercice 7

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Trouver une matrice B telle que $A \times B = \begin{pmatrix} -12 & 5 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$
2. Calculer $B \times A$. A et B commutent-elles ?

Exercice 8

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Calculer et comparer $A^2 + 2AB + B^2$ et $(A + B)^2$.

2 Inverses de matrices

Exercice 9

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. L'une des matrices suivantes est-elle l'inverse de A ?

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 10

Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 2 & 6 & -6 \\ -4 & -6 & 10 \end{pmatrix}$

1. Calculer AB . En déduire que A est inversible et donner A^{-1} .
2. Calculer CD . En déduire que D est inversible et donner D^{-1} .

3 Calcul algébriques

Exercice 11

Si A et B sont des matrices carrées d'ordre 3, développer et réduire au maximum les expressions suivantes :

(a) $3A^2 + A(A + I_3)$

(b) $(A + B)(A - B)$

(c) $(A + I)(A - 2I_3)$

(d) $(A - B)^2$

Exercice 12

Si A et B sont des matrices carrées d'ordre 3, factoriser lorsque c'est possible :

(a) $A^2 + A$

(b) $A^2 - A$

(c) $A^2 + AB$

(d) $A^2 + BA$

Exercice 13

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -10 \\ 2 & -5 & 10 \\ 2 & -6 & 11 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 4A$, en déduire que A est inversible et calculer A^{-1} .

4 Synthèse

Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 2A - 8I$.
2. En déduire, sans calcul, que $A^2 = 2A + 8I$, puis que $A^3 = 12A + 16I$.
3. Démontrer par récurrence qu'il existe deux suites de nombres réels (a_n) et (b_n) telles que, pour tout entier naturel n , $A^n = a_n A + b_n I$.
On précisera les premiers termes de ces suites, ainsi que a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .
4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 4a_n + b_n$ et $v_n = -2a_n + b_n$. Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont géométriques. Calculer leurs termes généraux en fonction de n .
En déduire les termes généraux des suites (a_n) et (b_n) .
5. En déduire A^n , pour n appartenant à \mathbb{N} .