

1 Primitives

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = xe^x$.

1. Montrer que $F : x \mapsto (x - 1)e^x$ est une primitive de f .
2. Déterminer toutes les primitives de f .

Exercice 2

Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I :

- | | |
|--|---|
| (a) $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$ sur $I = \mathbb{R}$ | (b) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ sur $I =]0; +\infty[$ |
| (c) $f(x) = 3x^2 - \frac{2}{x^3}$ sur $I =]0; +\infty[$ | (d) $f(x) = 3e^x - 1$ sur $I = \mathbb{R}$ |
| (e) $f(x) = \frac{3}{2x^2} - \frac{x}{4}$ sur $I =]0; +\infty[$ | (f) $f(x) = \frac{e^x + x}{2}$ sur $I = \mathbb{R}$ |

Exercice 3

Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I :

- | | |
|---|---|
| (a) $f(x) = 2e^{2x}$ sur $I = \mathbb{R}$ | (b) $f(x) = \frac{1}{1+x}$ sur $I =]-1; +\infty[$ |
| (c) $f(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$ sur $I =]-\frac{1}{3}; +\infty[$ | (d) $f(x) = 4 \times 2x(1+x^2)^3$ sur $I = \mathbb{R}$ |
| (e) $f(x) = e^{-x}$ sur $I = \mathbb{R}$ | (f) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ sur $I =]0; +\infty[$ |
| (g) $f(x) = \frac{1}{x} \ln x$ sur $I =]0; +\infty[$ | (h) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ sur $I =]-\frac{1}{2}; +\infty[$ |

2 Intégrales

Exercice 4

Calculer les intégrales suivantes :

- | | | | |
|----------------------------------|---|---------------------------------------|---------------------------------------|
| (a) $\int_0^4 (x^2 - x + 1)dx$ | (b) $\int_1^2 \left(2x - \frac{1}{x}\right) dx$ | (c) $\int_{-2}^{-1} \frac{2}{x^2} dx$ | (d) $\int_{-2}^4 3e^x dx$ |
| (e) $\int_0^5 \frac{2}{2t+1} dt$ | (f) $\int_{-5}^0 e^{-2t} dt$ | (g) $\int_{-2}^{-1} \frac{3}{x^3} dx$ | (h) $\int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$ |

3 Intégration par partie

Exercice 5

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties :

(a) $\int_2^4 x^2 \ln x dx$

(b) $\int_{-1}^1 x e^x dx$

(c) $\int_1^{10} \ln x dx$

(d) $\int_0^4 (1+x)e^{-x} dx$

(e) $\int_1^e (\ln x)^2 dx$

Exercice 6

On considère, pour tout entier naturel n , l'intégrale $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

1. Calculer I_0 .
2. Montrer, au moyen d'une intégration par parties, que pour tout $n \geq 0$,

$$I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$$

3. En déduire les valeurs de I_n pour n allant de 1 à 3.
4. En déduire $\int_0^1 (x^3 - 2x^2 + 3x + 1)e^{-x} dx$

Exercice 7

On veut calculer la valeur de l'intégrale $I_n = \int_1^e (\ln x)^4 dx$.

Pour cela, on considère, pour tout entier naturel n , l'intégrale $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$.

1. Calculer I_0 .
2. À l'aide d'une intégration par parties, établir une relation entre I_{n+1} et I_n pour tout $n \geq 0$.
3. En déduire la solution du problème.