Exercices : TVI

1 Image d'un intervalle

Exercice 1 (*Activité d'introduction*)

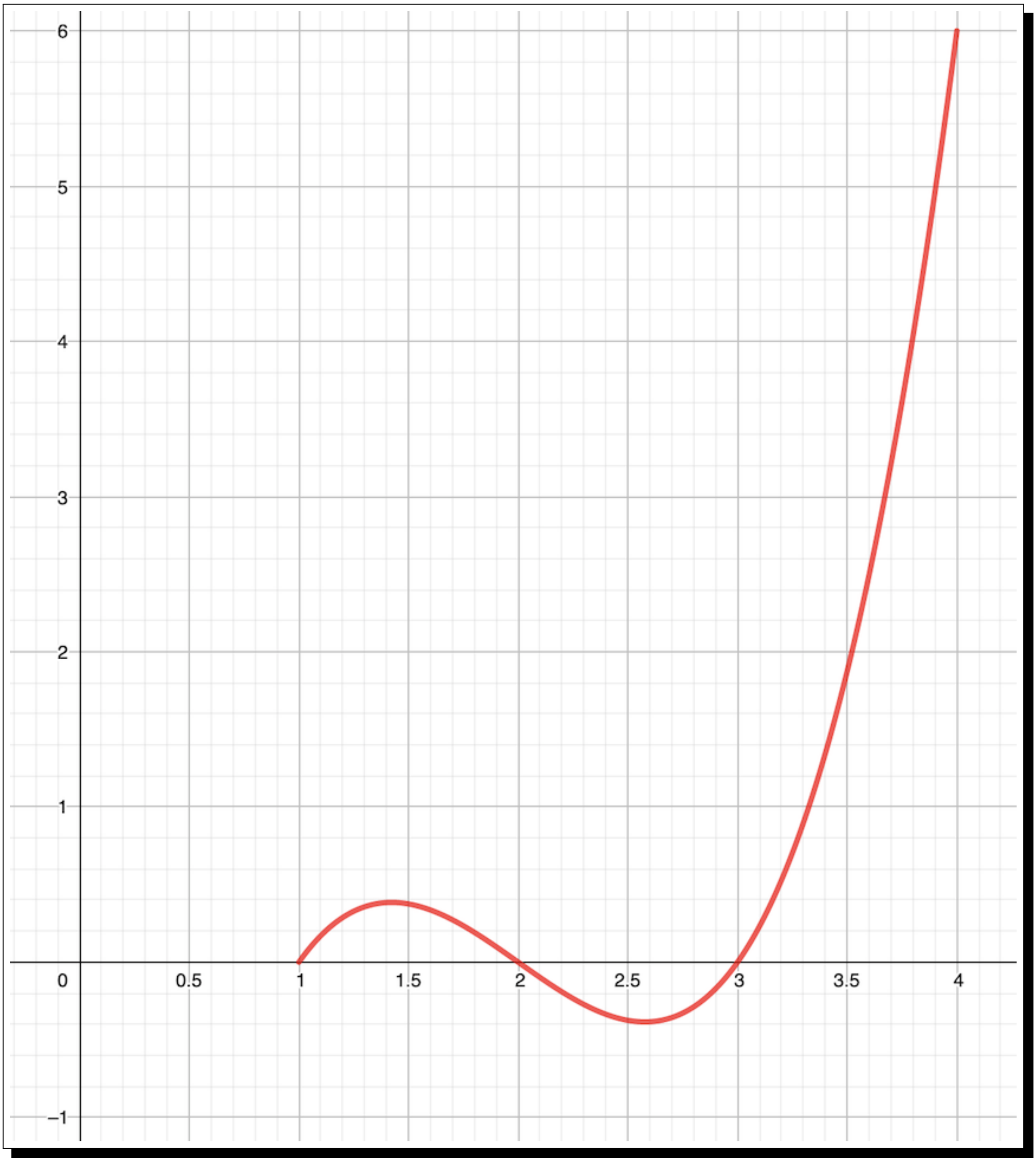


FIGURE 1 – La fonction $f : x \mapsto x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ définie sur I=[1,4]

La figure.**??** est la représentation graphique de la fonction f définie par

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \text{ sur } I = [1, 4]$$

1. Quelle est l'image de 1 ? De 2 ? De 3 ? De 4 ? De 5 ? Donner la réponse sous la forme $f(...) = ...$
2. Le nombre 0 a t'il un antécédent par f ? Le nombre -1 ? Le nombre 2 ?
3. Sur la figure.**??**, repassez en couleur tous les nombres qui ont au moins un antécédent. Comment s'écrit cet ensemble sous forme mathématique ?

Définition

Cet ensemble est **l'image de l'ensemble I par la fonction f**.

4. Donner un nombre de l'ensemble image qui admet trois antécédents.
5. Donner un nombre de l'ensemble image qui admet exactement deux antécédents.
6. Donner un nombre de l'ensemble image qui admet exactement un antécédent.

Exercice 2

Dans chacun des cas donner l'image l'intervalle I par la fonction donnée

1. $f(x) = x + 2,\ I = [2, 5]$
2. $g(x) = 2x - 3,\ I = [-1, 4]$
3. $h(x) = \dfrac{1}{x}$, $I = [2, 6]$
4. $i(x) = x^2 + x + 1,\ I = [-2, 2]$

2 T.V.I

Exercice 3 (*D'après ESC 2007*)

1. Montrer que la fonction g définie sur $]0; 1[$ par $g(x) = x^3 - 3x + 1$ réalise une bijection de $]0; 1[$ sur $]-1; 1[$.
2. En déduire que l'équation $1 - 3x + x^3 = 0$ possède une unique solution α dans l'intervalle $]0; 1[$.
3. On donne les valeurs suivantes :

x	$0,1$	$0,2$	$0,3$	$0,4$	$0,5$	$0,6$	$0,7$	$0,8$	$0,9$
x^3	$0,001$	$0,008$	$0,027$	$0,064$	$0,125$	$0,216$	$0,343$	$0,512$	$0,729$

En déduire un encadrement de α d'amplitude 0,1.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$.

Exercices : TVI

1. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution, que l'on note α.
2. Montrer que $0 \leq \alpha \leq 1$.
3. Montrer que $\ln \alpha = -\alpha$.

Exercice 5 (*Extrait de ESC 2008*)

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x^2 + \ln x - 2$. On donne $\ln 2 \approx 0,7$.

1. Calculer la dérivée g' puis étudier les variations de g.
2. Calculer les limites de g en 0 à droite et en $+\infty$.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ d'inconnue $x > 0$ admet une unique solution que l'on notera α. Justifier que $1 < \alpha < 2$.
4. Donner le signe de $g(x)$ en établissant les cas $x < \alpha$, $x = \alpha$, $x > \alpha$.

Exercice 6

1. L'équation $x^3 - 3x - 1 = 0$ admet-elle des solutions ? Combien ?
2. L'équation $2x^4 + x = 2$ admet-elle des solutions ? Combien ?
3. L'équation $x^4 + x^3 = -1$ admet-elle des solutions ? Combien ?

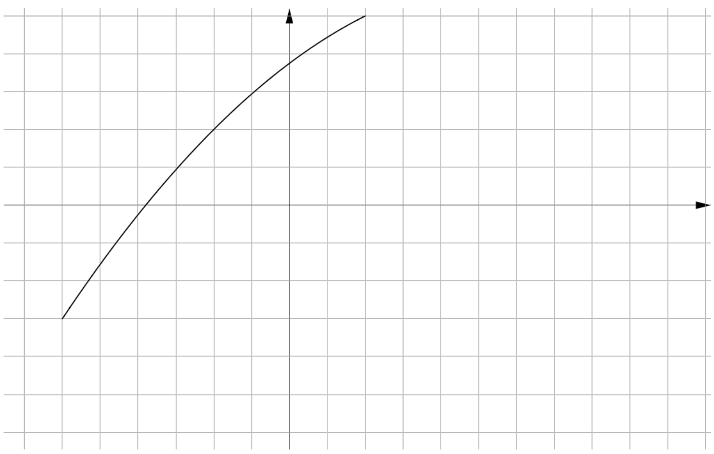
Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 1)(x + 1)$.

1. Établir le tableau des variations de f.
2. En déduire $f\left(]-\infty;0]\right)$, $f\left([0;1]\right)$ et $f\left([0;+\infty[\right)$.

Exercice 8

On a représenté ci-dessous la courbe représentative d'une fonction $f : [-3;1] \to \left[-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right]$:



Tracer sur le même graphique la courbe de la fonction réciproque de f.