Devoir maison 2 : corrigé

Exercice 1

On vérifie que $B \times C = C \times B = \begin{pmatrix} 26 & -4 \\ -24 & -4 \end{pmatrix}$

Donc B et C sont deux matrices qui commutent (et ce sont les seules dans cet exercice)

Exercice 2 (d'après ESC 2007)

1. On a $A - I = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

   Donc $A(A-I) = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & -6 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$ La même méthode permet de trouver $B(B-I) = 0$ (matrice nulle).
2. Il n'y a pas besoin de refaire de calcul numérique. Un calcul algébrique suffit.
   En effet $A(A-I) = A \times A - A \times I = A^2 - A$ par distributivité . Puisque ce produit est nul, on obtient $A^2 - A = 0$ et donc $\boxed{A^2 = A}$.
   De la même manière on trouve $\boxed{B^2 = B}$
3. Le produit matriciel donne $\boxed{AB = BA - 0}$ On note dans toute la suite $W = A + 2B$.
4. Par calcul : $A\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
5. $W\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (A+2B)\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2B\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
6. $$\begin{aligned} W^2 = (A+2B)^2 = (A+2B)(A+2B) &= A^2 + 2AB + 2BA + 4B^2 \\ &= A + 0 + 0 + 4B \\ &= \boxed{A + 4B} \end{aligned}$$
7. Montrer que pour tout entier n plus grand que 1, on a $W^n = A + 2^n B$
   Initialisation.
   Pour $n = 1$, on doit vérifier que $W^1 = A + 2^1.B$
   Or ceci est vrai , c'est la définition de W !

   Hérédité.
   On suppose que $W^n = A + 2^n B$ et on veut démontrer que $W^{n+1} = A + 2^{n+1} B$
   En utilisant l'hypothèse d'une part et la définition de W d'autre part :

$$\begin{aligned} W^{n+1} &= W^n \times W \\ &= (A + 2^n B) \times (A + 2B) \\ &= A^2 + 2AB + 2^n BA + 2^{n+1} B^2 \\ &= A + 0 + 0 + 2^{n+1} B \text{ car } B^2 = B \end{aligned}$$

Conclusion.
La propriété est vraie pour tout entier n plus grand que 1.