1 Préambule

On s'intéresse ici, suivant les valeurs de $\mu \in]0,4[$, à la suite définie par la relation de récurrence :

$$x_{n+1} = \mu . x_n (1 - x_n) \quad x_0 \in]0,1[$$

Cette suite est une modélisation de l'évolution d'une population, dit modèle *logistique* de Verhulst [1]

1. En mobilisant le concept de proportionnalité, justifier la pertinence de ce modèle.
2. On pose $f(x) = \mu x(1-x)$. Montrer que $f([0,1]) \subset [0,1]$
3. Etudier la fonction $x \mapsto f(x) - x$ sur $[0,1]$ et en déduire que (x_n) est décroissante lorsque $\mu \leq 1$, et qu'elle converge vers 0.

2 Conjectures avec Python

Pour la suite on fixera $x_0 = 0.9$

1. Programmer une visualisation des termes de la suite pour différentes valeur de μ en utilisation un graphique en *escargot*. On fera apparaître les valeurs des x_k sous l'axe des x comme suit :

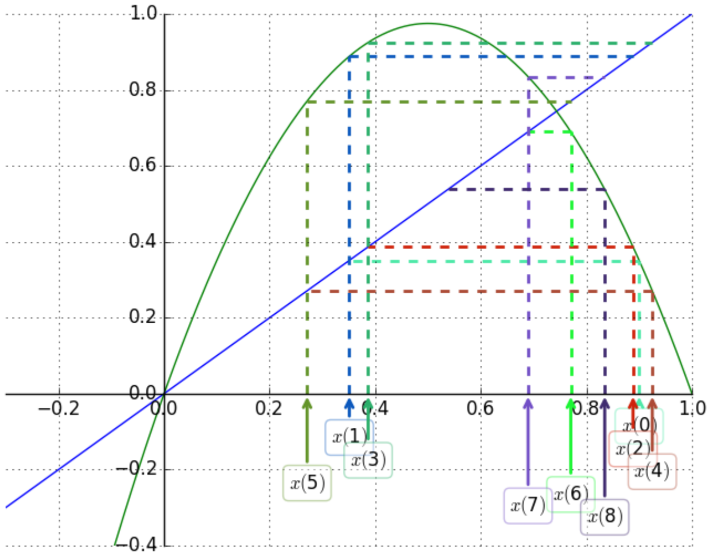

FIGURE 1 – $\mu = 3.9$

1. Pierre-François Verhulst (1804-1849)

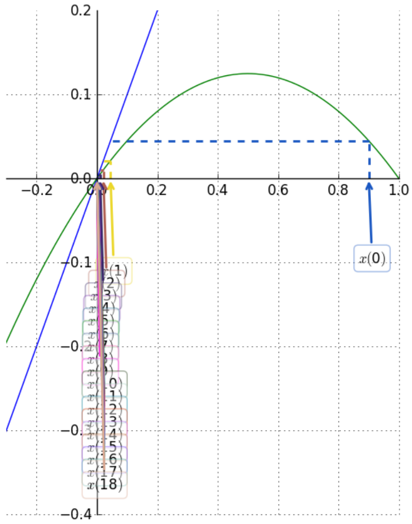

FIGURE 2 – $\mu = 0.5$

2. Pour faciliter les conjectures, on va construire un graphique, qui pour chaque $\mu \in [0, 4]$ donné en abscisse , les valeurs de x_n pour $n \in [101, 200]$ en ordonnée. Quelles conjectures peut-on faire ? Justifier le titre de ce TP.

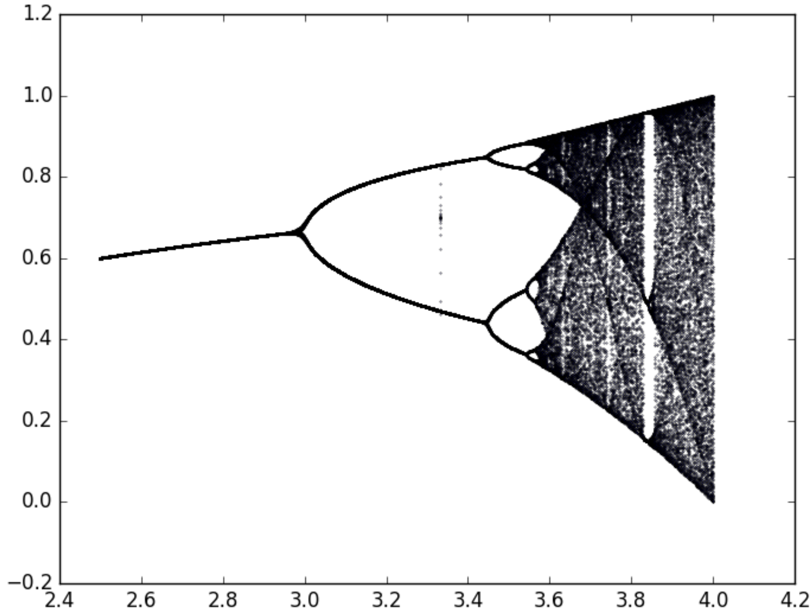

FIGURE 3 – Diagramme de Feigenbaum