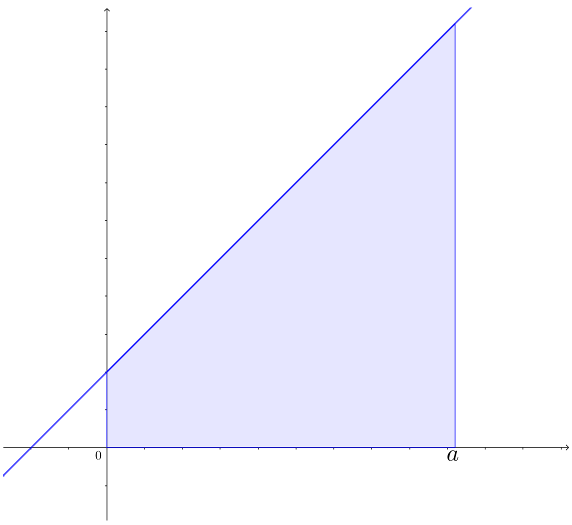
Intégrale d'une fonction

1 Premier exemple

.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1$.

Pour tout $a > 0$, on note $F(a)$ l'aire comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = a$.



La formule de l'aire d'un trapèze $\left(\dfrac{(\text{petite base} + \text{grande base}) \times \text{largeur}}{2}\right)$ donne :

$$F(a) = \frac{(1 + a + 1) \times a}{2} = \frac{(a+2)a}{2} = \frac{1}{2}a^2 + a$$

On remarque que cette fonction nouvellement créée possède la propriété suivante :

$$F'(a) = a + 1 = f(a)$$

Généralisation.

Soit f une fonction positive définie sur un intervalle et F la fonction où $F(a)$ est l'aire comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = \alpha$ et $x = a$ où $\alpha < a$
Alors F vérifie que $F'(a) = f(a)$.

2 Primitive d'une fonction

Définition.

On appelle primitive d'une fonction f définie et continue sur un intervalle $[a; b]$ toute fonction F définie et dérivable sur $[a; b]$ telle que $F' = f$.

Exemple :
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$.
$F(x) = x^2$ est une primitive de f. $F_2(x) = x^2 + 1$ en est une autre.

Théorème.

Toute fonction continue f sur un intervalle $[a; b]$ y admet des primitives.
Si F est une primitive de f sur $[a; b]$, alors les primitives de f sont les fonctions de la forme $F + C$, où C est un nombre réel.

Exemple.
Les primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$ sont toutes les fonctions de la forme $F(x) = x^2 + C$ où C est un nombre réel.

Primitives des fonctions usuelles

Tableau des primitives

Fonction f	Fonction primitive F	Intervalle
x^n, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$]0, +\infty[$
$\frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$	$-\frac{1}{n-1}x^{n-1}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
e^{ax} où $a \neq 0$	$\frac{1}{a}e^{ax}$	$\mathbb{R}$

Primitive et opération

La primitive d'une somme est la somme des primitives.
En revanche, on ne dispose pas d'expression simple de la primitive d'un produit ou d'un quotient de fonctions.

Exemple.
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 3$ a pour primitive $F(x) = x^2 - 3x$.
En revanche, la primitive de $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$ ne peut pas être obtenue directement à partir de primitives de fonctions usuelles.

Primitives sous forme de fonctions composées

Nous pouvons lire à l'envers les dérivées des fonctions composées déjà rencontrées :

Fonction	u^n	$\sqrt{u}$	$\ln u$	e^u	Primitive
Dérivée	$n \times u' \times u^{n-1}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\frac{u'}{u}$	$u'e^u$	Fonction

Exemple.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

Nous reconnaissons la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u = x^2+1$. Donc $F(x) = \ln(x^2+1)$ est une primitive de f.

Remarque.
Si la forme n'apparaît pas exactement, on peut essayer de la faire apparaître en multipliant la fonction par un coefficient scalaire. Par exemple, la fonction g évoquée plus haut peut s'écrire $g(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+1}$ et donc une primitive de g est $G(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$.

3 Intégrale d'une fonction

Définition.

Étant donnée une fonction f définie et continue sur un intervalle $[a;b]$, et F un primitive de f sur cet intervalle,
on appelle intégrale de f entre a et b, et on note $\int_a^b f(x)dx$, la différence $F(b) - F(a)$.

Remarque. Cette définition ne dépend pas du choix de la primitive de f. En effet, une autre primitive G de f serait de la forme $F + C$ et par conséquent $G(b) - G(a) = F(b) + C - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$.

Exemple :

Pour calculer $\int_1^2 2xdx$, on cherche une primitive de $f(x) = 2x$, soit $F(x) = x^2$.
Alors $\int_1^2 2xdx = F(2) - F(1) = 4 - 1 = 3$.

Relation de Chasles.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;c]$, et $b \in [a;c]$,
alors $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.

Remarque :
Par conséquent, si f est une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$, on a $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

4 Propriétés de l'intégrale

Linéarité de l'intégrale

Propriétés

Pour toutes fonctions f et g continues sur un intervalle $[a;b]$, et pour tout nombre λ,
$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
$\int_a^b (\lambda f(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$

Exemple :
$\int_1^4 \left(\frac{5}{x}+10x\right)dx = 5\int_1^4 \frac{1}{x}dx + 10\int_1^4 xdx$

Intégration par parties

Théorème.

Étant données deux fonctions u et v dérivables sur un intervalle $[a;b]$,

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Exemple :
Soit à calculer l'intégrale $\int_1^4 2x\ln x dx$.
Important : En ECT, l'énoncé fourni généralement la fonction u et v' à poser.

Donné :	$u' = 2x$	$v = \ln x$
A trouver :	$u = x^2$	$v' = \frac{1}{x}$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_1^4 2x\ln x dx &= [x^2\ln x]_1^4 - \int_1^4 x^2 \times \frac{1}{x}dx \\
&= 16\ln 4 - 0 - \int_1^4 xdx \\
&= 32\ln 2 - [\frac{1}{2}x^2]_1^4 \\
&= 32\ln 2 - \left(8 - \frac{1}{2}\right) \\
&= \boxed{32\ln 2 - \frac{15}{2}}
\end{aligned}$$

Positivité de l'intégrale

Théorème.

Si f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Corollaire.
Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$ telles que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a;b]$,
alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Exemple. Montrons que $\displaystyle\int_1^{100} \frac{1}{1+t^2}dt \leq 1$:
Pour tout $t \in [1;100]$, $1+t^2 > t^2$ donc $\dfrac{1}{1+t^2} < \dfrac{1}{t^2}$.
Donc $\displaystyle\int_1^{100} \frac{1}{1+t^2}dt < \int_1^{100} \frac{1}{t^2}dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^{100} = -\frac{1}{100} + 1 \leq 1$.