Devoir maison

A rendre pour le 2 mars.
En plus du TVI, ce devoir permet de se re-familiariser avec :

- La fonction ln ;
- Les limites ;
- Les suites ;
- Le raisonnement par récurrence.

Pour tracer une fonction en ligne, on peut se rendre à l'adresse

https://www.geogebra.org/calculator

Dans la commande de saisie, on tape directement la formule de la fonction.

1 Exercice

On considère deux fonctions f et g définies sur $]0;+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad f(x) = 2 - \frac{1}{2}\ln(x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = f(x) - x.$$

On considère aussi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Montrer que $g(x) = 2 - \frac{1}{2}\ln(x) - x$
2. Calculer les limites $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$:
   (a) En reportant sur la copie l'allure graphique de la fonction g et en expliquant.
   (b) En utilisant les résultats sur le calcul des limites vus en ECT1.
3. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$ puis dresser le tableau des variations de g sur $]0;+\infty[$.
4. Prouver que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0;+\infty[$.
   On la note α.
5. Justifier que :
   $$\alpha \in [1, e] \text{ et } f(\alpha) = \alpha.$$
6. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$ et préciser la monotonie de la fonction f.
7. Montrer que $u_1 = 2$ et donner une valeur approchée de u_2
8. Démontrer par récurrence que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq u_n \leq e.$$