1 Leçon

Pour notre permière séance du 30 septembre (13h30-16h30 ?), je vous propose de travailler sur la leçon

204 - Espaces vectoriels normés (evn) de dimension finie, normes usuelles, équivalence des normes

Il me faudra un volontaire pour cette leçon (à définir par mail). Pour cette leçon, outre le plan proposé par le titre, je vous propose de vous poser les questions suivantes :

- Outre les $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$, qu'est ce que je connais comme autres exemples d'evn (pas forcément de dimension finie), avec quelles normes ? [Indication ; pensez aux suites, aux fonctions, aux matrices, aux polynômes..]
- Parmis ceux de dimensions finies, suis-je capable de donner des normes équivalentes ?
- Dans des inégalités type $\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1$ pour des normes équivalentes, suis-je capable de donner des constantes optimales ?
- Est-ce que je connais des cas d'égalité de l'inégalité triangulaires pour une norme donnée ?
- Toute norme provient t-elle d'un produit scalaire ? Comment prouver qu'une norme ne provient pas d'un produit scalaire ? Est-ce que je connais une CNS pour qu'une norme provienne d'un produit scalaire ?
- Est-ce que je connais la notion de norme matricielle *induite* (ou *subordonnée*) à une norme vectorielle ? Toute norme matricielle est-elle subordonnée à une norme vectorielle ?
- Toute norme est-elle une norme d'algèbre, i.e a t'on toujours $\forall\, x, y\,,\, \|xy\| \leq \|x\|.\|y\|$? Sinon peut'on trouver c tel que $\forall\, x, y\,,\, \|xy\| \leq c.\|x\|.\|y\|$

2 Problème

Une fois toutes ces questions résolues (!), je vous propose de faire simultanément de la topologie et de l'algèbre linéaire. Essayer d'aller au moins jusqu'à 2.2.3. Peut-être que nous n'aurons pas le temps de tout corriger le 30, nous en garderons pour la séance d'après.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) étant un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes y sont équivalentes. Ceci signifie que les topologies induites par les normes sont égales et que l'eu peut s'affranchir de préciser la norme utilisée, lorsqu'on parle de convergence, d'adhérence, d'intérieur, etc...
En identifiant $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K}^{n^2}$, on a par exemple :

$$\|A\|_1 = \sum_{i,j} |a_{i,j}| \qquad \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2} \qquad \|A\|_\infty = \sup_{i,j} |a_{i,j}|$$

On définit aussi une norme matricielle N subordonnée à une norme $\|.\|$ sur $\mathbb{K}^n$ en posant :

$$N(A) = \sup_{\|X\|=1} \|AX\|$$

2.1 Densité de $GL_n(\mathbb{K})$

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. En déduire que si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $P_{AB}(X) = P_{BA}(X)$.

2.2 Etude topologique de l'ensemble des matrices diagonalisables $\mathcal{D}(\mathbb{K})$

On suppose $n \geq 2$ et on commence par un résultat négatif :

$$\boxed{\mathcal{D}(\mathbb{R}) \text{ n'est pas dense dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

1. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $P_A(X) = X^n + 1$ et $\text{tr}(A) = 0$ (on pourra penser aux matrices compagnons...).
2. On va supposer, par l'absurde, que $A \in \overline{\mathcal{D}}$ et qu'il existe une suite (A_p) de $\mathcal{D}$ convergeant vers A.
   (a) Quelles sont les limites des suites $(A_p^n)_p$ et $(tr(A_p))_p$?
   (b) Soit λ_p une valeur propre de A_p et X_p un vecteur propre associé. Montrer que
   $$\lambda_p^n + 1 \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$
   (c) En raisonnant sur la parité de n, déterminer la limite de $(\lambda_p)_p$ puis celle de $(\text{tr}(A_p))_p$ pour $p \to +\infty$, et aboutir à une contradiction.

   On va en fait démontrer en 4. que l'adhérence de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est égal à l'ensemble des matrices trigonalisables.

   ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆⋆

   On a par contre le résultat suivant :

$$\boxed{\mathcal{D}(\mathbb{C}) \text{ est dense dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$$

3. Démontrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une suite de matrices trigonales à coefficients diagonaux distincts qui converge vers M. Conclure.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆⋆

$$\boxed{\text{L'adhérence de } \mathcal{D}(\mathbb{R}) \text{ est égal à l'ensemble } \mathcal{T} \text{ des matrices trigonalisables.}}$$

4. En reprenant le raisonnement fait en 3. pour une matrice $M \in \mathcal{T}$, montrer que $\mathcal{T} \subset \overline{\mathcal{D}(\mathbb{R})}$.
5. Pour démontrer l'inclusion inverse, il suffit de démontrer que $\mathcal{T}$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:
   (a) Soit $\varphi\colon \begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \to & \mathbb{R}^n \\ M & \mapsto & (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \end{array}$ où les $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$ sont les valeurs propres de M rangées dans l'ordre.
   Soit $T \in \overline{\mathcal{T}}$ et $(T_p)_p$ une suite de $\mathcal{T}$ qui tend vers T.
   Montrer que l'on peut se ramener au cas où $(\varphi(T_p))_p$ est une suite convergente. (on remarquera que $\|\varphi(M)\|_\infty \leq \|M\|$). On notera $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ la limite de $(\varphi(T_p))_p$.

(b) On note $\varphi(T_p) = (\lambda_{1,p}, \lambda_{2,p}, ..., \lambda_{n,p})$.
Montrer que $P_T = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)...(X-\lambda_n)$ et conclure.
Attention à l'apparente facilité de cette question....

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

$\boxed{\text{Etude de l'intérieur de } \mathcal{D}(\mathbb{C})}$

6. Montrer que $\mathcal{D}(\mathbb{C})$ n'est pas ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
7. On note $\mathcal{U}$ l'intérieur de $\mathcal{D}(\mathbb{C})$ et on va montrer que

$$\overset{\circ}{\widehat{\mathcal{D}(\mathbb{C})}} = \mathcal{U} = \mathcal{D}^1$$

où $\mathcal{D}^1$ est l'ensemble des matrices diagonalisable à spectre simple (toutes les valeurs propres sont de multiplicité 1).

(a) Montrer que $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}^1$.
Indication : Prendre une matrice diagonalisable ayant au moins une valeur propre double et montrer qu'elle ne peut pas être dans $\mathcal{U}$

(b) Montrer que $\mathcal{D}^1$ est ouvert.
Indication : On pose $P(X_1, X_2, ..., X_n) = \prod_{i<j}(X_i - X_j)$, on prend $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$ les valeurs propres de M rangées dans l'ordre.

- ➢ *Montrer que P est un polynôme en $\sigma_1, \sigma_2, .., \sigma_n$, les n polynômes symétriques élémentaires de $\mathbb{C}[X_1, X_2, ..., X_n]$. [On peut admettre ce point qui n'est pas officiellement au programme de l'agrégation interne...]*
- ➢ *Montrer que les $\sigma_i(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ dépendent polynomialement des coefficients de M.*
- ➢ *En déduire que* $\varphi\colon \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathbb{C} \\ M & \mapsto & \prod_{i<j}(\lambda_i - \lambda_j) \end{array}$ *est continue et conclure.*

(c) En déduire que $\boxed{\mathcal{U} = \mathcal{D}^1}$.