Lois à densité : résumé

1 La loi uniforme

Définition.

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}[a;b]$,

si X a pour densité la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{b-a} \text{ si } x \in [a;b] \\ f(x) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$

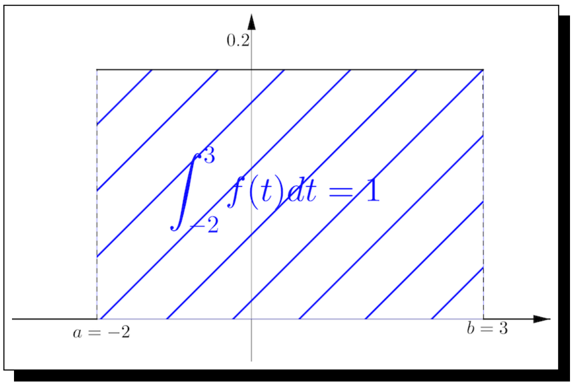


FIGURE 1 – Exemple : $X \hookrightarrow \mathcal{U}[-2;3]$

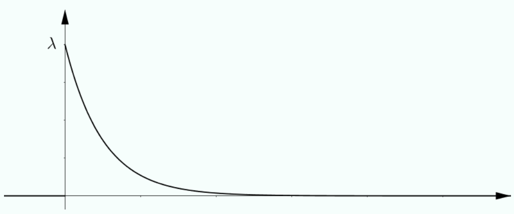
Propriété.

Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}[a;b]$, alors $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ et $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

2 La loi exponentielle

Définition.

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, si X a pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$



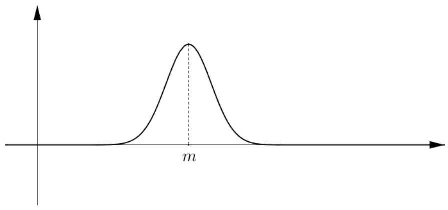
Espérance / Variance

Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

3 La loi normale

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance m et de variance σ^2, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, si X a pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$ dont la courbe représentative est :



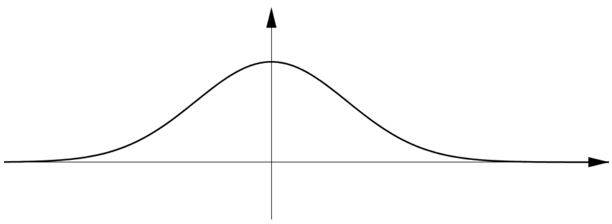
Propriété.

Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors $X^* = \dfrac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.
On dit alors que X^* suit une loi normale *centrée réduite*.

X^* a pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad \text{(cette formule n'est pas à retenir)}$$

dont la courbe représentative est :

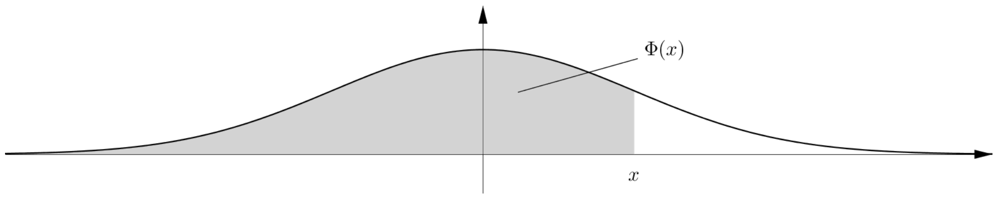


On note Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite.

Propriété utile de Φ .

Pour tout nombre réel x, $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$.

Tableau des valeurs prises par la fonction Φ



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Un exemple très classique : si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(5,2)$, calculer $P(2 \leq X \leq 6,5)$. :

1. **On se ramène à la loi centrée réduite :**

$$P(2 \leq X \leq 6,5) = P(\frac{2-5}{2} \leq X^* \leq \frac{6,5-5}{2}) = P(-1,5 \leq X^* \leq 0,75)$$

2. **On ramène le calcul à des nombres figurant dans le tableau :**

$$P(-1,5 \leq X^* \leq 0,75) = P(X^* \leq 0,75) - P(X^* < -1,5) = \Phi(0,75) - \Phi(-1,5)$$

3. **On utilise le tableau pour conclure** On a $\Phi(-1,5) = 1 - \Phi(1,5)$. $\Phi(1,5) \approx 0,9332$, donc $\Phi(-1,5) \approx 0,0668$, et $\Phi(0,75) \approx 0,7734$.
   Donc $\boxed{P(2 \leq X \leq 6,5) \approx 0,7734 - 0,0668 = 0,7066}$.