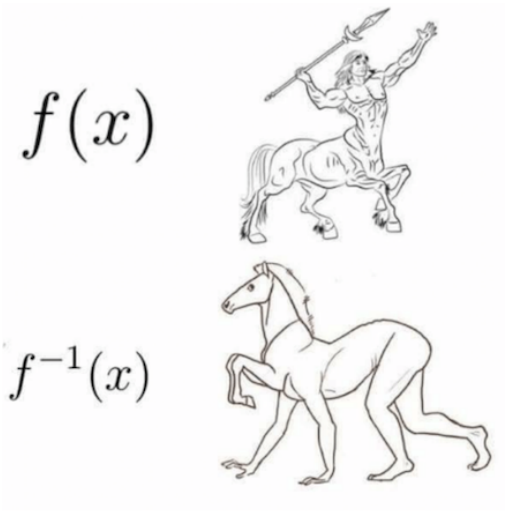
# Fonctions 1




Now that's what I call an inverse function

Dans ce chapitre, nous allons préciser certaines notions articulées à la notion de fonction. Les notions rencontrées ici ne sont pas nouvelles.

La notion de fonction s'est précisée au XVIII$^{e}$ siècle. Elle a permis des progrès considérables en mathématiques.

**Fonction**

Aujourd'hui, on appelle fonction une correspondance établie depuis chaque élément d'un ensemble de départ avec un unique élément d'un ensemble d'arrivée. L'ensemble de départ est appelé *ensemble de définition*. Ce sera toujours pour nous un ensemble de nombres réels.

$$\begin{array}{ccc} \text{Ensemble de définition} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Sur la deuxième ligne nous avons noté par la lettre $x$ un élément quelconque de l'ensemble de définition, auquel est associé un nombre appelé son *image* et noté $f(x)$.

Exemple 1 : La fonction carré est définie sur $\mathbb{R}$, son ensemble de définition, par $f(x) = x^2$. C'est-à-dire qu'à tout nombre réel elle fait correspondre le produit de ce nombre par lui-même. Ainsi, au nombre 2 elle associe le nombre 4. Au nombre 3,5 elle associe le nombre 12,25. Au nombre -2 elle associe aussi le nombre 4. etc ...

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\text{fonction carré}} & \mathbb{R} \\ 2 & \longmapsto & 4 \\ 3,5 & \longmapsto & 12,25 \\ -2 & \longmapsto & 4 \end{array}$$

L'*image* de -2 est 4. Les *antécédents* de 4 sont 2 et -2. Le nombre -1 n'a aucun antécédent.

En `Python` la fonction carrée se définit de la façon suivante :

```
def carré(x):
    return x**2

carré(3)

> 9
```

# 1 Représentation graphique

**Courbe représentative**

Dans un repère, chaque couple (un nombre, son image) désigne un point. Lorsqu'on fait varier le nombre de départ, ce point trace une courbe, appelée courbe représentative de la fonction $f$.

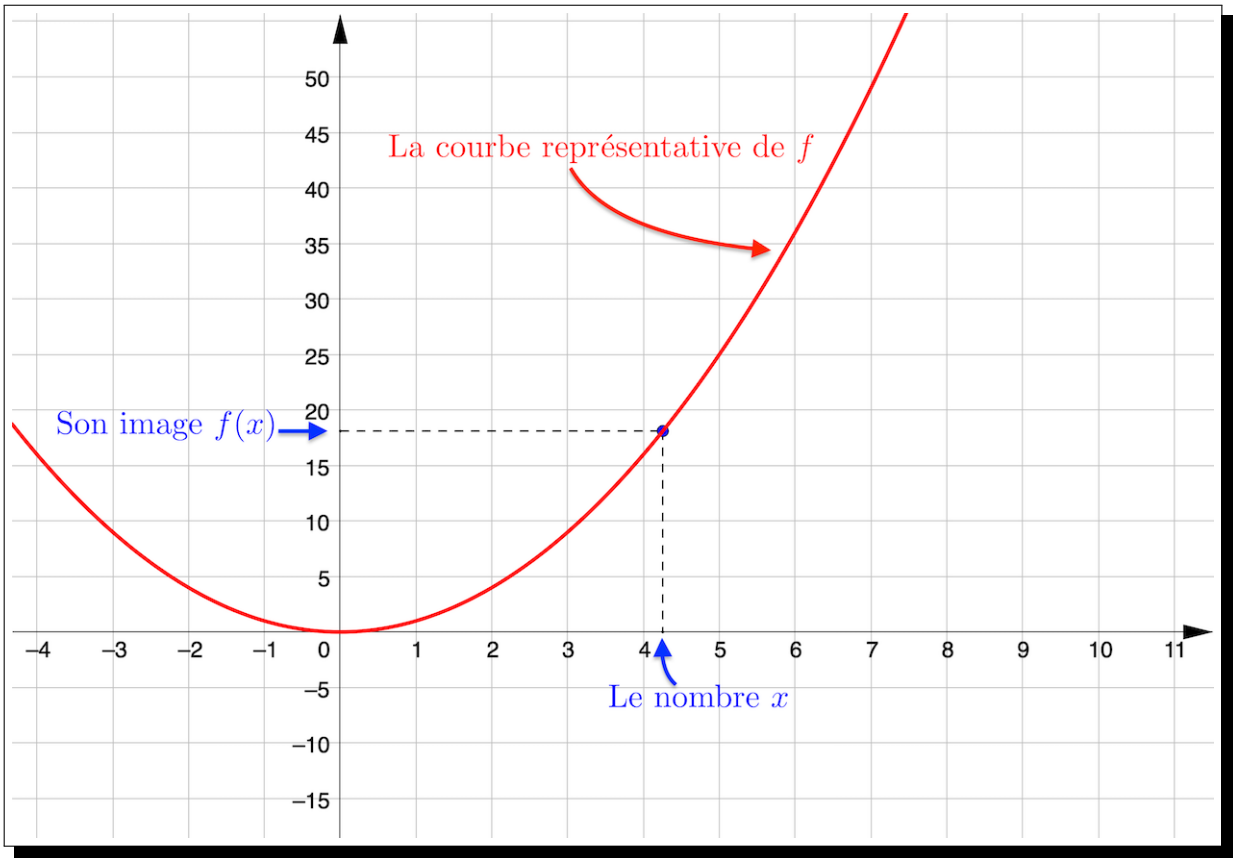



FIGURE 1 – La courbe représentative de $x \mapsto x^2$

Exemple : Prenons à nouveau la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$.
Le point de coordonnées $(2,1; 4,41)$ appartient à sa courbe représentative car $4,41 = 2,1^2$.
En revanche le point de coordonnées $(3,5; 12)$ n'appartient pas à cette courbe car $12 \neq 3,5^2$.

## 2 Parité

**Fonction paire**

Une fonction définie sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ est dite **paire** si sa courbe représentative dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Et si son ensemble de définition est symétrique par rapport à 0 mais nous n'insistons pas sur ce point en ECT.

**Propriété**

Une fonction $f$ est paire si :

- pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = f(x)$.

Et si pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $-x \in \mathcal{D}_f$, mais non évoqué en ECT

Exemple : La fonction définie sur $]-\infty;-2] \cup [2;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2-4}$ est paire. En effet,

- pour tout $x \in ]-\infty;-2] \cup [2;+\infty[$, $f(-x) = \sqrt{(-x)^2-4} = \sqrt{x^2-4} = f(x)$.

Exemple : La courbe représentative de la fonction $f$ ci-dessus est la suivante :

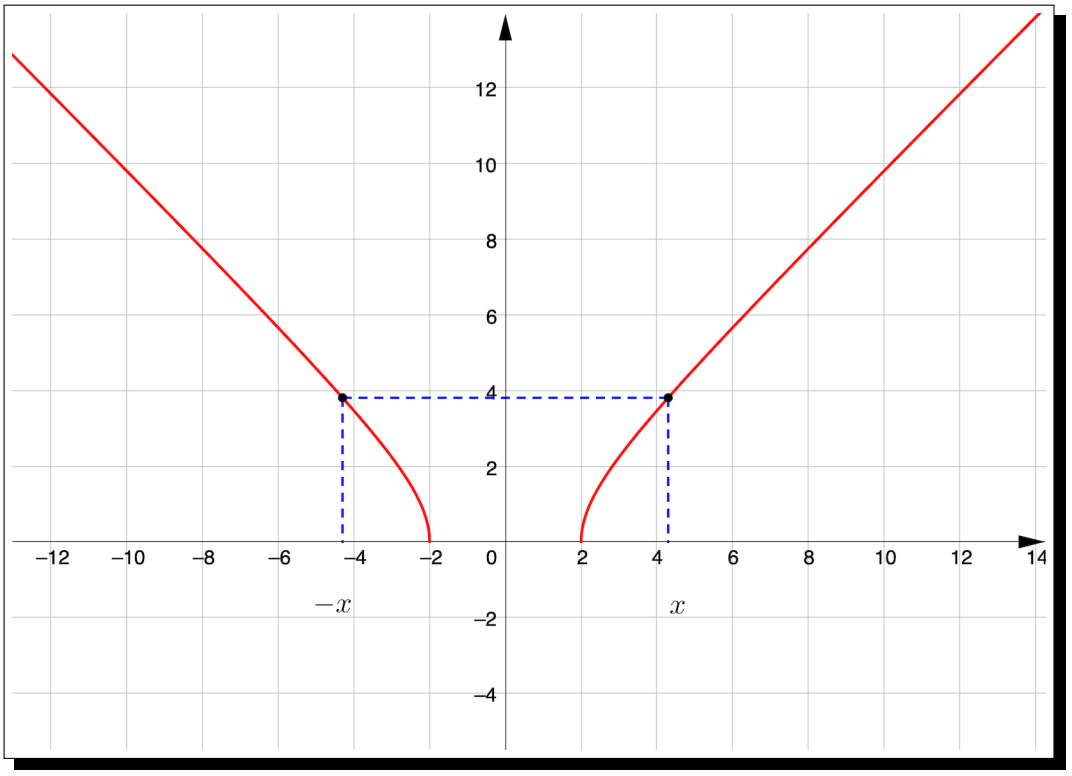



FIGURE 2 – La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2-4}$ est impaire.

**Fonction impaire**

Une fonction $g$ définie sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_g$ est dite **impaire** si sa courbe représentative dans un repère quelconque est symétrique par rapport à l'origine.

**Propriété**

Une fonction $f$ est impaire si :

- pour tout $x \in \mathcal{D}_g$, $g(-x) = -g(x)$.

Exemple : La fonction $g$ définie sur $]-2;0[\cup]0;2[$ par $g(x) = \dfrac{1}{x(x-2)(x+2)}$ est impaire. En effet,

- pour tout $x \in ]-2;0[\cup]0;2[$, $g(-x) = \dfrac{1}{-x(-x-2)(-x+2)} = \dfrac{1}{-x(x+2)(x-2)} = -\dfrac{1}{x(x+2)(x-2)} = -g(x)$.

Exemple : La courbe représentative de la fonction $g$ ci-dessus est la suivante :

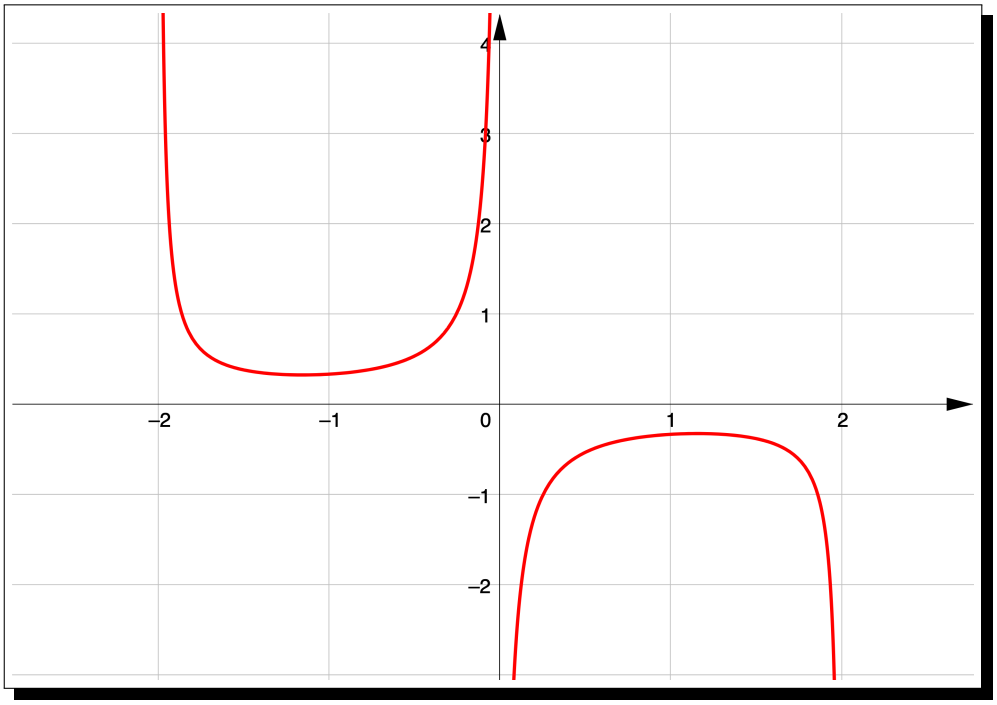



FIGURE 3 – La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x(x-2)(x+2)}$ définie sur $]-2,0[\cup]0,2[$ est impaire.

## 3 Monotonie

**Fonction croissante**

Une fonction $f$ définie sur un intervalle $I$ est dite **croissante** sur $I$ lorsque pour tous $x_1$ et $x_2$ de $I$, si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$.

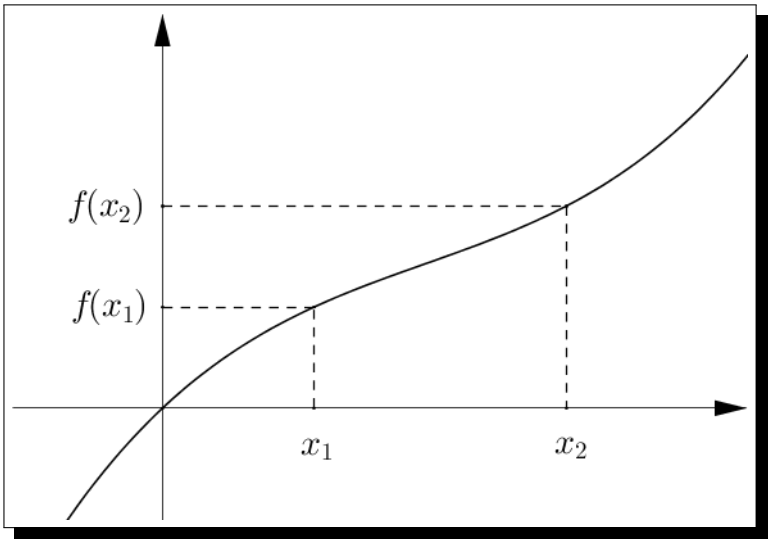
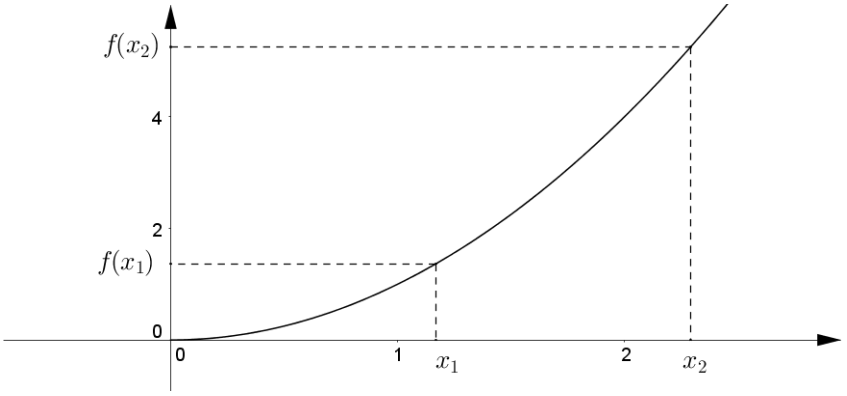



FIGURE 4 – Une fonction croissante

**Exemple :** Prenons la fonction carré définie cette fois sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et appelons-là $f$.




Pour tous $x_1$, $x_2$ de $[0; +\infty[$, supposons que $x_1 < x_2$
alors pour comparer $x_1^2$ et $x_2^2$, il est souvent pertinent d'étudier le signe de leur différence :
$f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$
Le premier facteur $(x_2 - x_1)$ est positif par hypothèse, et le deuxième facteur $x_2 + x_1$ est positif car c'est la somme de deux nombres positifs.
Donc $f(x_2) - f(x_1) > 0$, donc $f(x_1) < f(x_2)$.
Donc $f$ est croissante sur $[0; +\infty[$.

**Fonction décroissante**

Une fonction $f$ définie sur $I$ est dite décroissante lorsque pour tous $x_1$ et $x_2$ de $\mathcal{D}_f$, si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$.

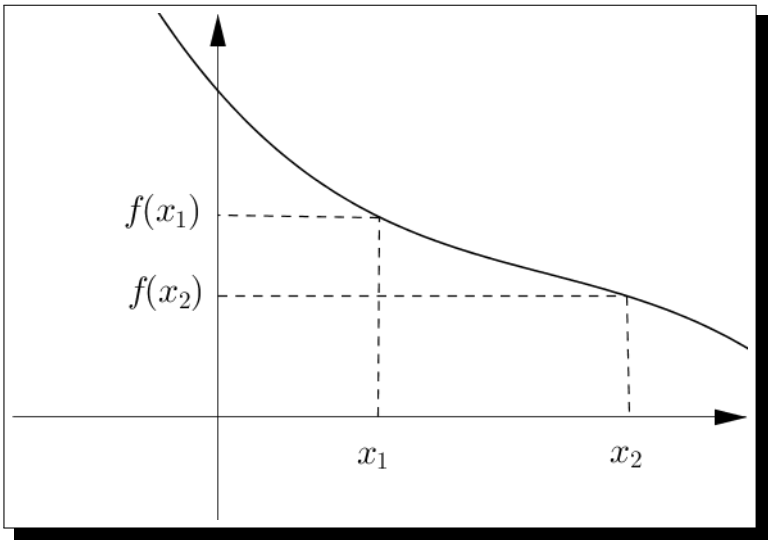



FIGURE 5 – Une fonction décroissante

## 3.1 Tableau de variations

On représente les variations d'une fonction dans un tableau appelé tableau de variations.

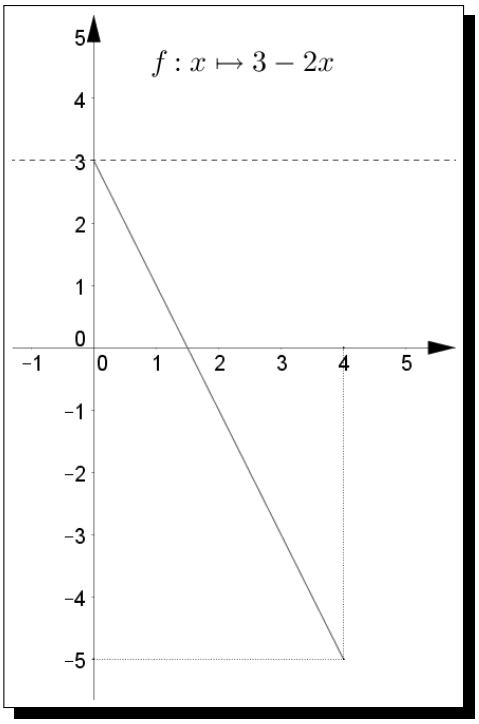
**Exemple :** le tableau ci-dessous est le tableau de variation d'une fonction $f$ définie sur $[-2; +\infty[$, croissante sur l'intervalle $]-2; 3]$ et décroissante sur l'intervalle $[3; +\infty[$. Par ailleurs, $f(-2) = -4$ et $f(3) = 5$.

| $x$ | $-2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $-4$ | $\nearrow$ | $5$ | $\searrow$ | |

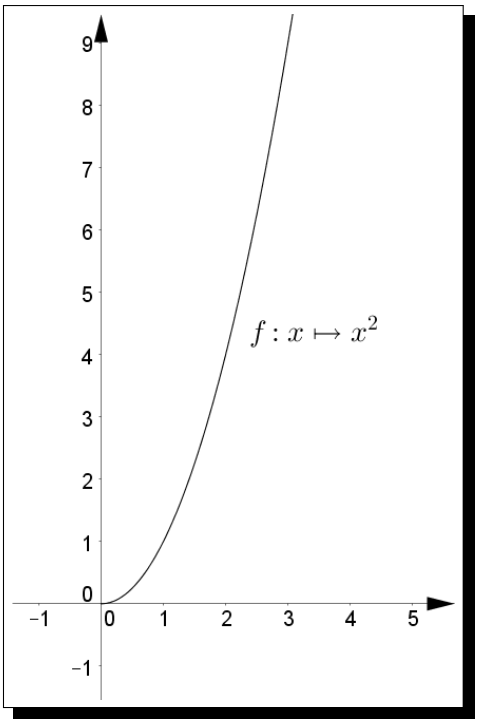
# 4 Bornes

**Fonction majorée**

Une fonction $f$ définie sur $\mathcal{D}_f$ est dite majorée si il existe un nombre réel $M$ tel que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) \leq M$.
$M$ est alors appelé un majorant de $f$ sur $\mathcal{D}_f$.




(a) La fonction $f$ définie sur $[0, 4]$ par $f(x) = 2x + 3$ est majorée par 3.

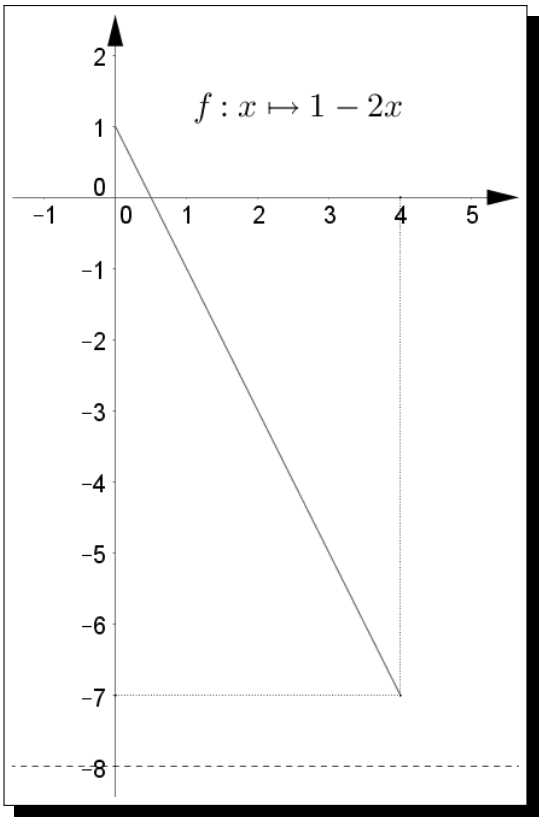



(b) La fonction $f$ définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^2$ n'est pas majorée.

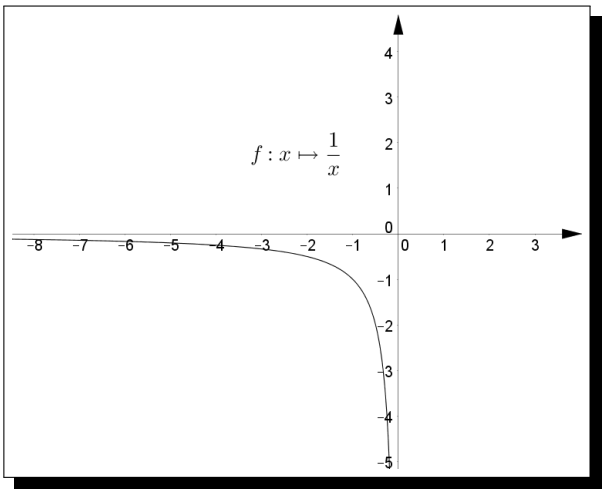
FIGURE 6

**Fonction minorée**

Une fonction $f$ définie sur $\mathcal{D}_f$ est dite minorée si il existe un nombre réel $m$ tel que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) \geq m$.
$m$ est alors appelé un minorant de $f$ sur $\mathcal{D}_f$.




(a) La fonction $f$ définie sur $\mathcal{D}_f = [0; 4]$ par $f(x) = 1 - 2x$ est minorée par -8.




(b) La fonction $f$ définie sur $]-\infty; 0[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas minorée.

FIGURE 7

**Fonction bornée**

Une fonction $f$ définie sur $\mathcal{D}_f$ est dite bornée si elle est à la fois minorée et majorée.

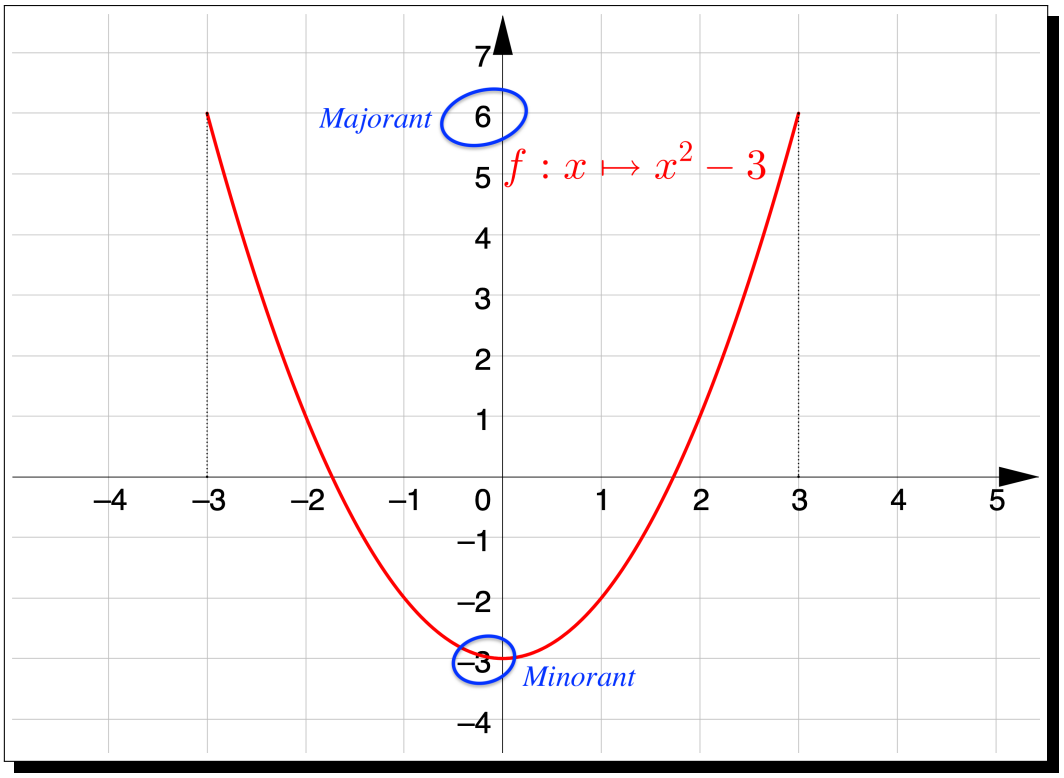



FIGURE 8 – La fonction $f$ définie sur $[-3; 3]$ par $f(x) = x^2 - 3$ est bornée. Elle est minorée par -3 et majorée par 6.

# 5 Opérations sur les fonctions

Il est possible d'appliquer les opérations connues sur les nombres aux fonctions : somme, différence, produit, quotient. Par ailleurs, il existe une opération spécifique aux fonctions, appelée composition de fonctions.

## 5.1 Somme, différence, produit, quotient

Exemple : Soit les fonctions $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + x^2$ et $g(x) = 1 - 2x$.

$f + g$ est la fonction qui à $x$ associe $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 1 + x^2 + 1 - 2x$.
$f - g$ est la fonction qui à $x$ associe $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = 1 + x^2 - 1 + 2x$.
$f \times g$ est la fonction qui à $x$ associe $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = (1 + x^2)(1 - 2x)$.
$\dfrac{g}{f}$ est la fonction qui à $x$ associe $\dfrac{g}{f}(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{1 - 2x}{1 + x^2}$.

## 5.2 Composition de fonctions

**Définition**

Étant données deux fonction $f$ et $g$ telles que $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$, la fonction **composée** de $g$ avec $f$, notée $g \circ f$, est la fonction définie sur $\mathcal{D}_f$ par $g \circ f(x) = g\left(f(x)\right)$.

1er exemple : Prenons $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x + 4$. Il n'y a pas de problème d'ensemble de définition car les deux fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$. $g \circ f(x) = g\left(f(x)\right) = g\left(x^2\right) = x^2 + 4$.

2e exemple : $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$ et $g$ est définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x} + 2$.
$f(\mathbb{R}) = [1; +\infty[ \subset \mathcal{D}_g$ donc $g \circ f$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1} + 2$.

## 5.3 Fonction bijective et fonction réciproque

**Fonction bijective**

Une fonction $f$ définie de l'ensemble $\mathcal{E}$ dans l'ensemble $\mathcal{F}$ est dite bijective si pour tout élément $y \in \mathcal{F}$, il existe un unique élément $x \in \mathcal{E}$ tel que $f(x) = y$.

**Fonction réciproque**

Si $f$ est une fonction bijective de l'ensemble $\mathcal{E}$ dans l'ensemble $\mathcal{F}$, on appelle fonction réciproque et on note $f^{-1}$ la fonction qui à tout $y \in \mathcal{F}$ associe l'élément $x \in \mathcal{E}$ tel que $f(x) = y$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{f} & \mathcal{F} \\ x & \longmapsto & y = f(x) \\ \mathcal{E} & \xleftarrow{f^{-1}} & \mathcal{F} \\ x = f^{-1}(y) & & y \end{array}$$

1er exemple : Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - 2x$.
Montrons que $f$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ :
Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f(x) = y \iff 1 - 2x = y \iff 1 - y = 2x \iff x = \dfrac{1-y}{2}$
Donc pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x = \dfrac{1-y}{2}$ tel que $f(x) = y$.
Donc $f$ est bijective et sa fonction réciproque est définie sur $\mathbb{R}$ par $f^{-1}(y) = \dfrac{1-y}{2}$.

2e exemple : Soit $f$ la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^2$.
Montrons que $f$ est bijective de $[0; +\infty[$ dans $[0; +\infty[$ :
Pour tout $y \in [0; +\infty[$, $f(x) = y \iff x^2 = y \iff x = \sqrt{y}$
Donc pour tout $y \in [0; +\infty[$, il existe un unique $x = \sqrt{y}$ tel que $f(x) = y$.
Donc $f$ est bijective et sa fonction réciproque est définie sur $[0; +\infty[$ par $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

**Propriété**

Dans un repère donné, les courbes représentatives des fonctions $f$ et $f^{-1}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

En effet, les axes des abscisses $x$ et des ordonnées $y$ sont échangés par cette symétrie.

**Exemple :** La fonction réciproque de la fonction $f$ définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x^2$ est $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ définie sur $[0, +\infty[$.

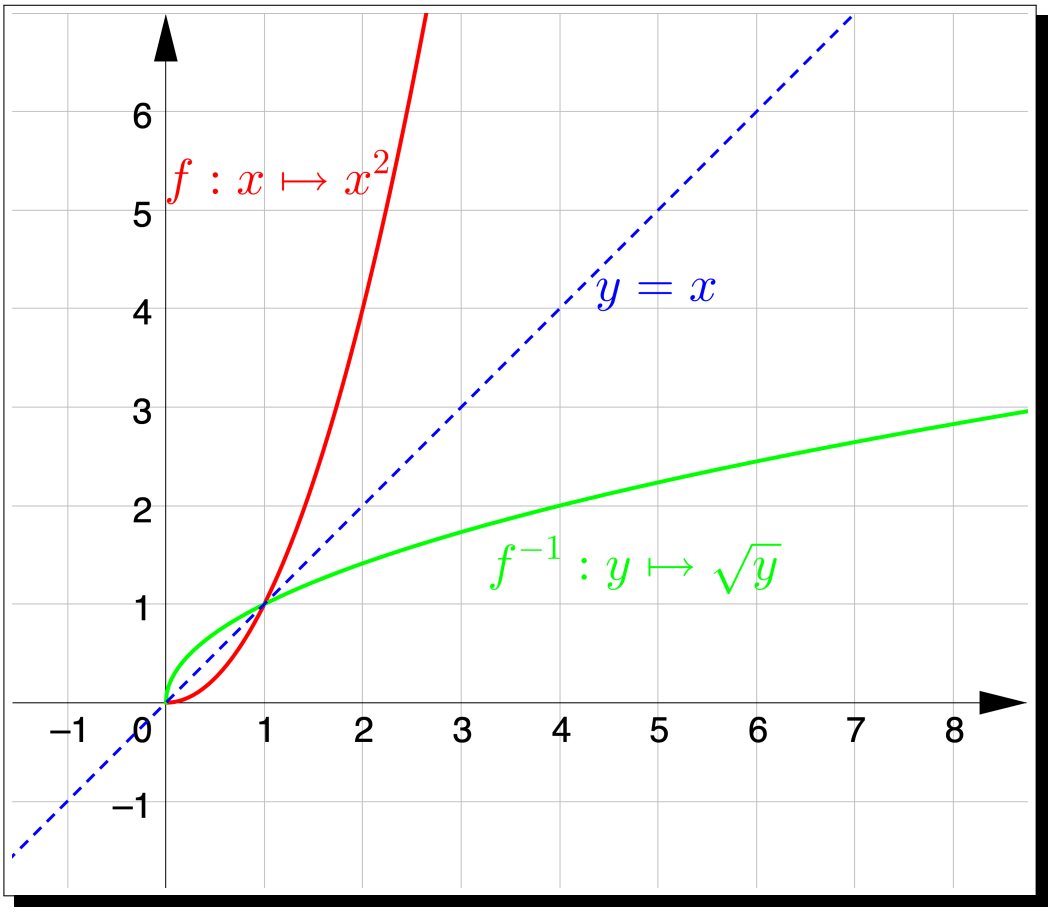



FIGURE 9 – Les courbes de $f$ et de $f^{-1}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$