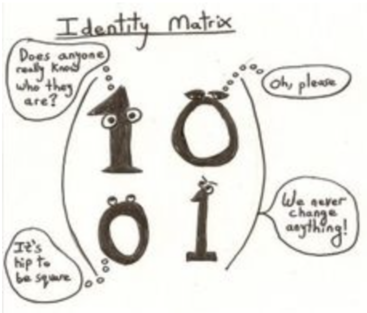
Matrices inversibles



1 Rappels des notions vues en ECT 1

Rappel d'ECT 1 : Les matrices sont des tableaux de nombres que l'on peut ajouter, soustraire, multiplier et parfois inverser. Nous les utiliserons pour résoudre des systèmes d'équations linéaires, et pour résoudre des problèmes stochastiques (i.e à des processus où le hasard intervient).

Les matrices sont largement utilisées en mathématiques, mais aussi dans de nombreux domaines de la physique, en imagerie numérique et en économie.

Une matrice

Une matrice est un tableau rectangulaire ou carré de nombres réels. Ces nombres sont les coefficients de la matrice.

Voici un exemple de matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0,1 & 0,2 & -12 \end{pmatrix}$

C'est un tableau de nombres réels. Celle-ci est une matrice 2×3, c'est-à-dire qu'elle a 2 lignes et 3 colonnes.
Les coefficients sont numérotés par leur ligne et leur colonne. Ici, le coefficient de la deuxième ligne et de la première colonne est $a_{21} = 0,1$.

Égalité

On dit que deux matrices sont égales quand tous leurs coefficients sont égaux un à un.

L'ensemble de toutes les matrices à n lignes et p colonnes est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Matrice transposée (Nouveau)

On obtient la matrice transposée d'une matrice A en intervertissant pour chaque coefficient la ligne et la colonne. On la note ${}^{t}A$.

Exemple : En reprenant la matrice A ci-dessus, ${}^{t}A = \begin{pmatrix} 1 & 0,1 \\ 0 & 0,2 \\ -2 & -12 \end{pmatrix}$.

Matrice carrée

Une matrice est dite carrée lorsqu'elle a autant de lignes que de colonnes.

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 2,3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée 2×2.

L'ensemble de toutes les matrices carrées à n lignes et n colonnes est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Matrices particulières

Une matrice carrée est dite **triangulaire** lorsque tous les coefficients sous la diagonale sont nuls.
Une matrice **ligne** est une matrice qui n'a qu'une ligne.
Une matrice **colonne** est une matrice qui n'a qu'une colonne.

Exemple : $\begin{pmatrix} 2 & 0,4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -0,5 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire.

Exemple : $\begin{pmatrix} 3,2 & -4 & 1 & 0,2 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne et $\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne.

1.1 Opérations sur les matrices

Il est possible d'appliquer aux matrices certaines des opérations que l'on a l'habitude d'appliquer aux nombres, comme l'addition et la multiplication.

1.1.1 Addition et soustraction

Pour ajouter deux matrices, elles doivent avoir les mêmes dimensions. Dans ce cas, la somme des deux matrices est obtenue en effectuant la somme des coefficients de même position.

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0,1 & 0,2 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3,12 & -5 & 2 \\ 5,8 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,12 & -5 & 0 \\ 5,9 & 2,2 & -13 \end{pmatrix}$

Soustraction. La soustraction s'effectue exactement de la même façon que l'addition.

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0,1 & 0,2 & -12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3,12 & -5 & 2 \\ 5,8 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,12 & 5 & -4 \\ -5,7 & -1,8 & -11 \end{pmatrix}$

Somme

Finalement, si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont deux matrices de mêmes dimensions, alors la somme $A + B$ des deux matrices est la matrice $C = (c_{ij})$, avec $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pour tous i et j.

1.1.2 Multiplication par un nombre

Définition

La multiplication d'une matrice par un nombre s'obtient en multipliant chaque coefficient de la matrice par ce nombre.

Exemple : $5 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0,1 & 0,2 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -10 \\ 0,5 & 1 & -60 \end{pmatrix}$

1.1.3 Exemples de multiplication de matrices

Exemple 1 : multiplication de matrices 2×2

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} & a_{11} \times b_{12} + a_{12} \times b_{22} \\ a_{21} \times b_{11} + a_{22} \times b_{21} & a_{21} \times b_{12} + a_{22} \times b_{22} \end{pmatrix}$$

Exemple : $\begin{pmatrix} 0,5 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 1,2 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18,5 & -19,4 \\ 13 & -11,2 \end{pmatrix}$

Exemple 2 : Multiplication de matrices 3×3

On multiplie les matrices 3×3 de façon semblable, c'est-à-dire que le coefficient (i, j) de la matrice produit est obtenu en multipliant les coefficients de la $i^{\text{ème}}$ ligne de la première par ceux de la $j^{\text{ème}}$ colonne de la seconde.

Par exemple, pour calculer le coefficient de la $3^{\text{ème}}$ ligne et de la $2^{\text{ème}}$ colonne du produit, on multiplie les coefficients de la $3^{\text{ème}}$ ligne de la première par ceux de la $2^{\text{ème}}$ colonne de la seconde :

$$\begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} . & b_{12} & . \\ . & b_{22} & . \\ . & b_{32} & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & . \end{pmatrix}$$

1.1.4 Multiplication de matrices dans le cas général

Produit de deux matrices

On ne peut multiplier deux matrices que si que le nombre de colonnes de la première est égal au nombre de lignes de la deuxième.
Dans ce cas si A est une matrice $n \times p$ et B une matrice $p \times q$, le produit $C = A \times B$:

- est une matrice $n \times q$;
- ses coefficients sont les nombres

$$\text{Pour tous } i, j, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

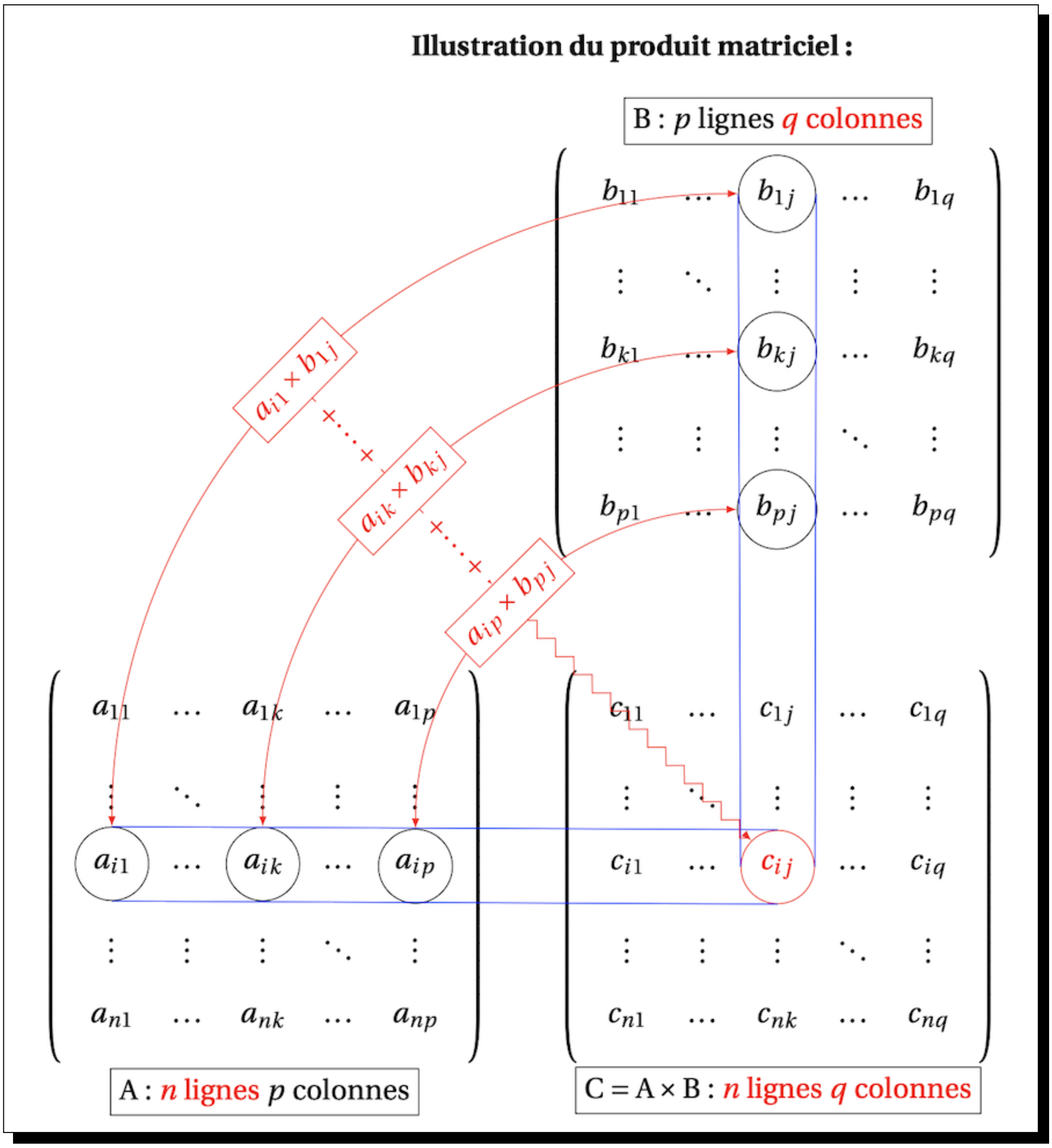


Figure 1 – Disposition pratique pour visualiser un produit matriciel - D'après Lafontaine

Exemple : $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 11 & 2 & 4 \\ -3 & -10 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

1.1.5 Multiplication par la matrice nulle

On appelle matrice nulle, et on note souvent 0 comme le nombre zéro (même si c'est ici une matrice carrée), la matrice constituée uniquement de zéros.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice nulle 3×3.

La matrice nulle multipliée par n'importe quelle matrice donne toujours la matrice nulle :
Pour toute matrice A, $A \times 0 = 0 \times A = 0$.

2 Inversion de matrices

2.1 Multiplication par la matrice identité

Il y a une matrice qui joue un rôle particulier pour la multiplication. Il s'agit de la matrice carrée qui n'a que des 1 sur la diagonale et des 0 ailleurs. Elle s'appelle matrice identité et on la note I, avec le plus souvent sa taille en indice :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ldots \text{ etc.}$$

La particularité de la matrice identité est que lorsqu'on la multiplie avec une autre matrice, le produit est inchangé, comme quand on multiplie un nombre par 1 : pour toute matrice carrée A, $A \times I = A$ et $I \times A = A$.

2.2 Matrice inverse

On ne parle de matrice inverse que pour les matrices carrées. Attention les matrices carrées **ne sont pas** toutes inversibles.

Définition

Soit A une matrice carrée. On dit que A est inversible s'il existe une matrice B telle que $A \times B = B \times A = I$. B est alors appelée l'inverse de A et notée A^{-1}.

Exemple : La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible et son inverse est $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0,5 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}$.

En revanche la matrice $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0,5 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Nous apprendrons plus tard comment savoir si une matrice est inversible et le cas échéant à trouver son inverse. Retenons d'ores et déjà qu'on **ne parle jamais de division de matrices**.

3 Règles opératoires sur les matrices

Toutes les propriétés des opérations sur les matrices sont les mêmes que celles des mêmes opérations sur les nombres sauf la commutativité de la multiplication. En voici quelques-unes (on considère dans ce paragraphe que les matrices ont des dimensions qui rendent possibles les opérations) :

Associativité de la somme et du produit

Pour toutes matrices A et B, $A+B=B+A$.
Pour toutes matrices A, B et C :

- $A+(B+C)=(A+B)+C$ et $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$ (*Commutativité de la somme*).
- $A\times(B+C)=A\times B+A\times C$. (*Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition*)

Ces propriétés seront appliquées sans y penser, par habitude. En revanche certaines propriétés des opérations sur les nombres ne sont plus valables pour les opérations sur les matrices **et là il convient de faire très attention !!** Les deux écueils principaux sont les suivants :

Commutativité du produit. Le produit de matrices **n'est pas** en général commutatif.

Exemple : Prenons $A=\begin{pmatrix}2 & 0,1\\ -1,5 & 4\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}3 & -8\\ 4 & 0\end{pmatrix}$.

Alors $A\times B=\begin{pmatrix}6,4 & -16\\ 11,5 & 12\end{pmatrix}$ et $B\times A=\begin{pmatrix}18 & -31,7\\ 8 & 0,4\end{pmatrix}$: les deux produits sont tout à fait différents !

3.1 Exemple d'utilisation. (Type sujet ESCP)

Soit A une matrice 3×3 et I l'identité d'ordre 3. Montrer que

$$A^2-3A+2I=(A-2I)(A-I)$$

Méthode : le double-distributivité reste valable pour le calcul matricielle. On part de la droite, on développe et on arrive au membre de gauche.