Exercices : Probabilité 2

1 Un peu d'histoire

La notion de *variable aléatoire* et d'*espérance* est apparue au cours d'un échange épistolaire, devenu célèbre en histoire des mathématiques, entre Blaise Pascal et Pierre de Fermat au milieu du 17e siècle. On avait soumis à ces deux savants le « *problème des partis* »(orthographe volontaire) qui consiste à répartir les mises d'un jeu d'une partie qui a été interrompue avant son terme.

À peu près au même moment Christian Huyghens publie un mémoire *Raisonnement sur les jeux de dés (1657)*, qui a donné naissance au concept d'*espérance mathématique*. On attribue généralement à Huyghens d'être à l'origine de la notion d'espérance mathématique, qui apparaît en latin sous le nom de *expectatio* avec l'interprétation d'être le juste prix auquel un joueur accepterait de céder sa place dans une partie.

2 (Ré)introduction aux variables aléatoires

Les variables aléatoires ont déjà été abordées en TSTMG. L'objectif de cette introduction est de remobiliser ce concept et de le préciser à la lumière du vocabulaire vu dans le premier chapitre de probabilité.

On lance deux fois de suite, de façon indépendante, un dé équilibré à quatre faces de couleurs différentes : Jaune, Vert, Rouge, Bleu que l'on notera J, V, R, B par commodité. On peut ainsi noter chaque résultat obtenu par un mot à deux lettres.
Par exemple, JR désigne l'évènement « Jaune au premier lancer et Rouge au second lancer ».

1. Quel est l'univers ? Quel est son nombre d'éléments ? Est-ce une situation d'équiprobabilité ?

On décide de la règle de jeu suivante :

— Si le résultat n'est pas un double (c'est-à-dire JJ,VV,RR,BB) :
  - la face J rapporte 2€ ;
  - la face V rapporte 1€ ;
  - la face R ne rapporte rien ;
  - la face B fait perdre 1€.

— Si le résultat est un double : on perd 3€.

On note X, le gain algébrique (possiblement négatif) obtenu à l'issue des deux lancers .

2. Construire un tableau permettant de calculer toutes les valeurs possibles prises par X, c'est-à-dire tous les gains possiblement obtenus.
3. Donner l'ensemble des issues pour lesquelles le gain vaut 1€. Cet ensemble d'issues sera désormais noté $[X = 1]$. En tant que sous-ensemble de l'univers, c'est un .... Quelle est sa probabilité ?
4. Calculer de la même façon les probabilités $P([X = k])$ pour toutes les valeurs possibles de k énumérées à la question.2. On présentera les résultats dans un tableau :

k	...	...	...
$P([X = k])$	...	....	...

Ce tableau s'appelle **le tableau de loi de la variable aléatoire X**.

3 Notion d'espérance

On vous propose le jeu suivant :
Lancez deux dés équilibrés à six faces.

- Si vous obtenez un double 6, vous gagnez 1 000 000 CFP.
- Dans le cas contraire vous perdez 10 000 CFP.

En analysant la situation et en argumentant, déterminez s'il est rentable de jouer à long terme à ce jeu, si l'on dispose d'une réserve d'argent suffisante.

4 Introduction aux fonctions de répartition

Dans une classe préparatoire, les étudiants ne peuvent s'empêcher de regarder leurs portables. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où un étudiant regarde son portable par heure. L'observation montre que la loi de X est donnée par :

x_i	1	3	6
$P(X = x_i)$	0,2	0,5	0,3

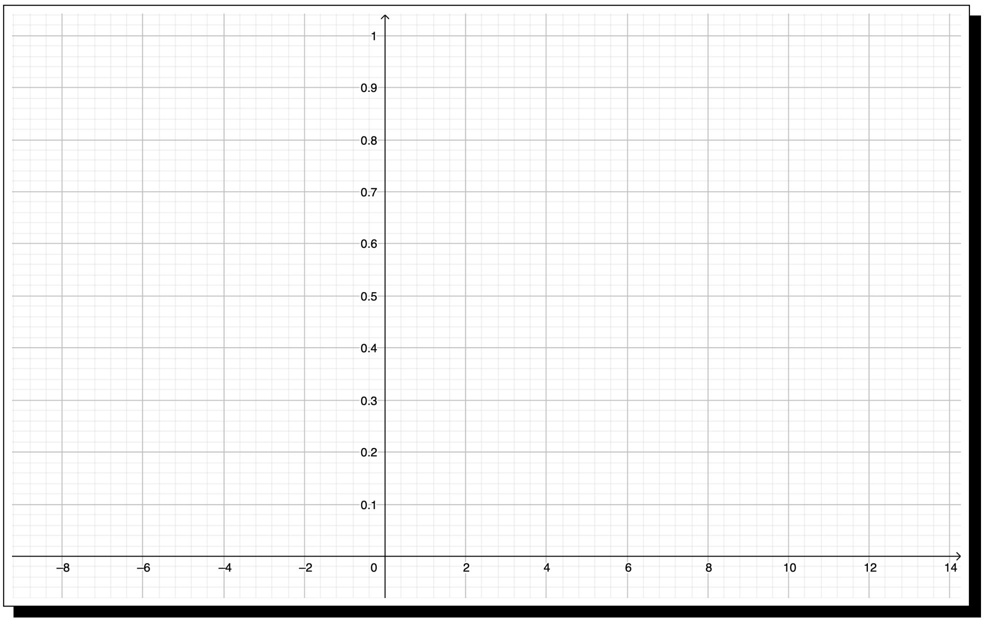
1. Que vaut $P(X \leq 0)$? $P(X \leq -1)$, et plus généralement $P(X \leq t)$ lorsque $t < 1$?
2. Comparer $[X \leq 1]$ à $[X = 1]$? En déduire $P(X \leq 1)$.
3. Compléter :
   - $P(X \leq 1,1) =$ ....
   - $P(X \leq 1,2) =$ ....
   - $P(X \leq 2) =$ ....

   Que vaut plus généralement $P(X \leq t)$ pour toute valeur de t telle que $t \in [1, 3[$?
4. Ecrire l'évènement $[X \leq 3]$ comme l'union de deux évènements, et en déduire $P(X \leq 3)$.
5. Compléter :
   - $P(X \leq 3,1) =$ ....
   - $P(X \leq 3,2) =$ ....
   - $P(X \leq 5) =$ ....

   Que vaut plus généralement $P(X \leq t)$ pour toute valeur de t telle que $t \in [3, 6[$?
6. Que vaut $P(X \leq 6)$ et plus généralement $P(X \leq t)$ pour $t \geq 6$?
7. Sur la base de ce qui vient d'être fait, compléter les égalités suivantes :

$$P(X \leq t) = \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ pour } t < 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ pour } t \in [1;3[\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ pour } t \in [3;6[\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ pour } t \geq 6 \end{cases}$$

8. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = P(X \leq t)$ (et donc les égalités précédentes). Représenter la fonction f dans le repère suivant :



Courbe représentative de la fonction de répartition de X

5 Exercices

Exercice 1

On lance deux dés équilibrés à quatre faces numérotées de 1 à 4. On note X la somme des deux dés.

1. Décrire l'univers Ω associé à cette expérience aléatoire et donner $X(\Omega)$.
2. Pour tout $k \in X(\Omega)$, écrire l'évènement $[X = k]$ sous la forme d'un ensemble et calculer $P(X = k)$.
3. Calculer $E(X)$

Exercice 2

On lance deux dés équilibrés à 6 faces. On note X la variable aléatoire égale à la plus grande des deux faces, et à l'une ou l'autre des deux faces lorsqu'elle sont égales.

1. Décrire l'univers Ω associé à cette expérience aléatoire.
2. Donner $X(\Omega)$.
3. Donner la loi de X et calculer $E(X)$.

Exercice 3

On considère une variable aléatoire X prenant les valeurs $0, 1, 2$ et 3 .

On donne $P(X = 0) = \dfrac{1}{10}$, $\quad P(X = 1) = \dfrac{1}{8}$ $\quad$ et $\quad P(X = 2) = \dfrac{1}{5}$.

1. Déterminer $X(\Omega)$
2. Déterminer $P(X = 3)$.
3. Calculer l'espérance de X.

Exercice 4

On considère une variable aléatoire X prenant les valeurs $0, 1, 2, 3$ et 4 .
On donne $P(X=0)=\dfrac{1}{10}$, $\quad P(X=1)=\dfrac{1}{4}$ $\quad$ et $\quad P(X=2)=\dfrac{1}{2}$.

1. Sachant que les évènements $[X=3]$ et $[X=4]$ sont équiprobables, déterminer $P(X=3)$.
2. Calculer l'espérance de X.

Exercice 5

On lance un dé pipé qui a une probabilité égale à $\dfrac{1}{2}$ de tomber sur 6, et la même probabilité de tomber sur chacune des autres faces de 1 à 5.

1. On lance une fois le dé et on note X le résultat du dé.
   (a) Montrer que $P(X=1)=0,1$. (b) Donner la loi de probabilité de X.
   (c) Calculer l'espérance de X .
2. On lance deux fois le dé et on note Y le nombre de 6 obtenus.
   (a) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Y ?
   (b) Calculer l'espérance de Y et l'interpréter par une phrase.
3. On lance deux fois ce même dé et on note S la somme des résultats obtenus.
   (a) Donner la loi de S.
   (b) Calculer l'espérance de S et l'interpréter par une phrase.

Exercice 6

On tire une boule au hasard dans une urne contenant six boules indiscernables au toucher, une verte, deux jaunes et trois rouges. Une boule verte rapporte 20 points, une jaune 10 points et une rouge 5 points. On note X le gain à l'issue d'un tirage.

1. Donner la loi de X.
2. Calculer l'espérance de X.

6 Linéarité de l'espérance

Exercice 7 (*Utilisation de la formule du cours*)

Soit X une variable aléatoire telle que $E(X)=1,2$.
Calculer :

(a) $E(2X-3)$ (b) $E(-X+2)$ (c) $E(5-3X)$ (d) $E(1+2X)$

Exercice 8

On jette un dé à six faces truqué. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre apparue sur la face supérieure. On suppose que sa loi est donnée par :

x_i	1	2	3	4	5	6
$P([X = x_i])$	0,1	0,1	0,2	0,35	0,15	0,1

1. Calculer l'espérance de X.
2. Calculer

Exercice 9 (*Linéarité de l'espérance*)

On tire au hasard deux boules dans une urne contenant 3 boules rouges et 2 boules bleues. On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouge tirées.

1. Donner la loi de X et son espérance.
2. Une boule rouge pèse 20g et une boule bleue 30g. Exprimer en fonction de X la masse M des deux boules tirées et calculer l'espérance de M.

7 Fonctions de répartitions

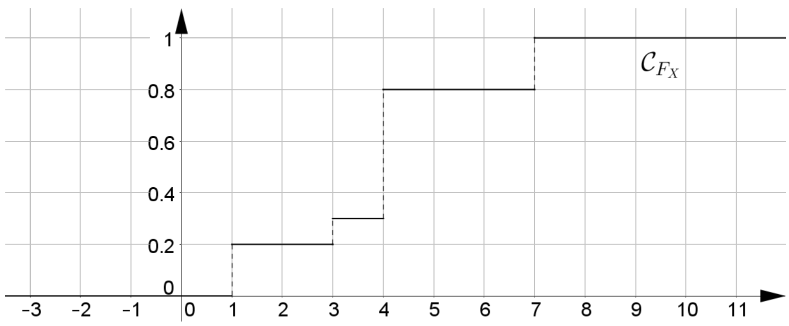
Exercice 10 (*Tracer une fonction de répartition*)

Un dé cubique est équilibré, mais ses faces sont les suivantes : -2 ; -2 ; 1 ; 1 ; 1 ; 4. On note X la variable aléatoire égale au nombre affiché sur le dé après un lancer.

1. Déterminer la loi de X et calculer son espérance.
2. Tracer la fonction de répartition de X.

Exercice 11 (*Retrouver une loi à partir de la fonction de répartition*)

On a représenté ci-dessous la fonction de répartition d'une variable aléatoire X.



Donner la loi de X.

Exercice 12

On lance quatre fois une pièce de monnaie, et on note X le nombre de pile obtenus.

Représenter la loi de X par un diagramme à bâtons ainsi que la courbe représentative de sa fonction de répartition.

Exercice 13

Cinq boules indiscernables au toucher sont placées dans une urne. Deux sont blanches, et trois sont noires. On tire au hasard, successivement et sans remise des boules de l'urne, et on s'arrête dès que l'on a pioché une boule blanche. On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de boules tirées.

1. Déterminer $X(\Omega)$ et la loi de probabilité de X.
2. Quelle est la probabilité que l'on s'arrête avant d'avoir tiré 3 boules ?
3. Tracer la courbe représentative de la fonction de répartition de X.
4. Calculer l'espérance de X.
5. On note Y le nombre de boules restant dans l'urne à l'issue du tirage. Exprimer Y en fonction de X et en déduire l'espérance de Y.