Intégrales : exercices

1 Primitives

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$.

1. Montrer que $F : x \mapsto (x-1)e^x$ est une primitive de f.
2. Déterminer toutes les primitives de f.

Exercice 2

Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I :

(a) $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$ sur $I = \mathbb{R}$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ sur $I =]0; +\infty[$

(c) $f(x) = 3x^2 - \dfrac{2}{x^3}$ sur $I =]0; +\infty[$

(d) $f(x) = 3e^x - 1$ sur $I = \mathbb{R}$

(e) $f(x) = \dfrac{3}{2x^2} - \dfrac{x}{4}$ sur $I =]0; +\infty[$

(f) $f(x) = \dfrac{e^x + x}{2}$ sur $I = \mathbb{R}$

Exercice 3

Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I :

(a) $f(x) = 2e^{2x}$ sur $I = \mathbb{R}$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ sur $I =]-1; +\infty[$

(c) $f(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}}$ sur $I =]-\dfrac{1}{3}; +\infty[$

(d) $f(x) = 4 \times 2x(1+x^2)^3$ sur $I = \mathbb{R}$

(e) $f(x) = e^{-x}$ sur $I = \mathbb{R}$

(f) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ sur $]0; +\infty[$

(g) $f(x) = \dfrac{1}{x}\ln x$ sur $I =]0; +\infty[$

(h) $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$ sur $I =]-\dfrac{1}{2}; +\infty[$

2 Intégrales

Exercice 4

Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^4 (x^2 - x + 1)dx$

(b) $\displaystyle\int_1^2 \left(2x - \frac{1}{x}\right) dx$

(c) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{2}{x^2} dx$

(d) $\displaystyle\int_{-2}^{4} 3e^x dx$

(e) $\displaystyle\int_0^5 \frac{2}{2t+1} dt$

(f) $\displaystyle\int_{-5}^{0} e^{-2t} dt$

(g) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{3}{x^3} dx$

(h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$

3 Intégration par partie

Exercice 5

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties :

(a) $\displaystyle\int_2^4 x^2 \ln x dx$ (b) $\displaystyle\int_{-1}^1 xe^x dx$ (c) $\displaystyle\int_1^{10} \ln x dx$

(d) $\displaystyle\int_0^4 (1+x)e^{-x} dx$ (e) $\displaystyle\int_1^e (\ln x)^2 dx$

Exercice 6

On considère, pour tout entier naturel n, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

1. Calculer I_0.
2. Montrer, au moyen d'une intégration par parties, que pour tout $n \geq 0$,
$$I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$$
3. En déduire les valeurs de I_n pour n allant de 1 à 3.
4. En déduire $\displaystyle\int_0^1 (x^3 - 2x^2 + 3x + 1)e^{-x} dx$

Exercice 7

On veut calculer la valeur de l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_1^e (\ln x)^4 dx$.

Pour cela, on considère, pour tout entier naturel n, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_1^e (\ln x)^n dx$.

1. Calculer I_0.
2. À l'aide d'une intégration par parties, établir une relation entre I_{n+1} et I_n pour tout $n \geq 0$.
3. En déduire la solution du problème.