Devoir maison

A rendre pour le .

1 Étude de fonction

On considère les fonctions f et g définies sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{\ln(x)}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 + 1 - \ln(x)$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. (a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
   (b) Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe de f.
   (c) Montrer que $\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{D}$ sur $[1,+\infty[$ et en dessous de $\mathcal{D}$ sur $]0,1]$.
2. (a) Calculer la dérivée de g. En déduire le sens de variation de g sur $]0,+\infty[$.
   (b) Montrer que $g\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\ln(2)$. En déduire que $g(x)$ est positif strictement sur $]0,+\infty[$.
   (c) Montrer que la dérivée de f vérifie pour tout réel x strictement positif : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$
   (d) Déduire des questions précédentes le tableau des variations de f en y faisant figurer les limites trouvées en 1.a)
3. Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ dans un repère orthonormé d'unité 2cm.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

4. (a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $u_n \geq n + 1$.
   (b) Déterminer le sens de variation et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.