Fonctions 2 : Exercices

1 Introduction

Nous allons étudier la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}$.

Le but est de donner toutes les informations possibles vues au précédent chapitre (lesquelles ?) et de donner de nouvelles informations, que nous appellerons *limites*.

Exceptionnellement, la calculatrice est autorisée.

1. Remplir le tableau de valeur suivant :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$												

   Que remarquez-vous pour la valeurs 1 ?

2. Nous allons essayer d'être plus précis pour comprendre ce qui se passe lorsque x est « proche »de 1 mais sans jamais être égal à 1.

   Remplir le tableau de valeur :

x	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7
$f(x)$												

   On peut même essayer d'être encore plus proche :

x	0.99	0.999	0.9999	0.99999	1.00001	1.0001	1.001	1.01
$f(x)$								

   Que se passe t'il lorsque x se rapproche de 1 ?

3. On va s'intéresser maintenant au cas où x augmente de façon franche dans la partie positive de l'axe des abscisses.

   Remplir le tableau suivant :

x	10	100	1000	10 000	100 000	1 000 000
$f(x)$						

   Que constatez-vous ?

4. On va s'intéresser maintenant au cas où x diminue de façon franche dans la partie négative de l'axe des abscisses.

x	-10	-100	-1000	- 10 000	-100 000	- 1 000 000
$f(x)$						

   Que constatez-vous ?

5. Tracer la courbe représentative de f. On prendra son cahier ou sa feuille en mode paysage, et on prendra 1cm pour unité dans un repère orthonormé, gradué de -10 à 10 sur l'axe des abscisses et de -8 à 8 sur l'axe des ordonnées.

6. Dresser le tableau de variations de f. Quelles nouvelles informations pouvons-nous apporter ?

2 Application du cours

Exercice 1

Donner pour chaque fonction sa limite en a :

1. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ définie sur $]-\infty; 1[$ en $a = 1$.
2. $g(x) = \dfrac{x+2}{x+3}$ définie sur $]-\infty; -3[$ en $a = -3$.
3. $h(x) = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ définie sur $]0; +\infty[$ en $a = 0$.
4. $k(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x-1}$ définie sur $]-\infty; 1[$ en $a = 1$.

Exercice 2

Donner pour chaque fonction sa limite en a :

1. $f(x) = 4x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$ en $a = +\infty$.
2. $g(x) = x^2 - \dfrac{1}{x}$ définie sur $]0; +\infty[$ en $a = 0$ et en $a = +\infty$.
3. $h(x) = 2 + \dfrac{3}{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$ en $a = -\infty$ et en $a = +\infty$.

Exercice 3

Donner pour chaque fonction sa limite en a :

1. $f(x) = x^2 - 3x + 2$ définie sur $\mathbb{R}$ en $a = -\infty$ et en $a = +\infty$.
2. $g(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x+2}$ définie sur $\mathbb{R}$ en $a = -\infty$ et en $a = +\infty$.
3. $h(x) = -3x^3 + 2x^2 - x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$ en $a = -\infty$ et en $a = +\infty$.
4. $k(x) = \dfrac{-x^3 - x^2 + 4}{x^2 + x + 5}$ définie sur $\mathbb{R}$ en $a = -\infty$ et en $a = +\infty$.
5. $s(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{2x^2 + x + 2}$ définie sur $\mathbb{R}$ en $a = -\infty$ et en $a = +\infty$.

Exercice 4

Donner pour chaque fonction sa limite en a :

1. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 1}$ définie sur $\mathbb{R}$ en $a = +\infty$.
2. $f(x) = (-2x + 3)^3$ définie sur $\mathbb{R}$ en $a = -\infty$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{(-2x+1)^2}$ définie sur $]\dfrac{1}{2}; +\infty[$ en $a = +\infty$.

3 Asymptote

Exercice 5

Parmi les trois fonctions suivantes, deux au moins ont des courbes asymptotes. Lesquelles ?

$f(x) = \dfrac{2x^2 - x + 1}{x}$ $\quad g(x) = 2x - 1 - \dfrac{1}{x}$ $\quad h(x) = \dfrac{2x^2 + x + 1}{x}$

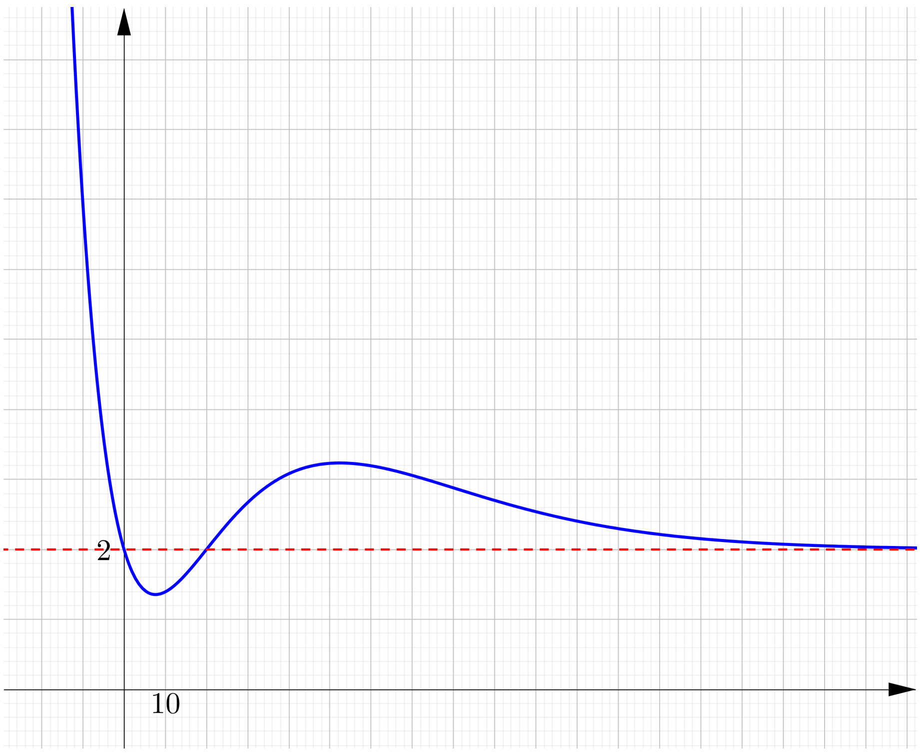
Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $]-2; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{2 + x}$.

1. Déterminer la limite de f en -2 et en $+\infty$.
2. Que peut-on en déduire pour la courbe de f ?
3. Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x - 2$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.
4. Étudier les variations de f.
5. Représenter graphiquement la courbe de f.

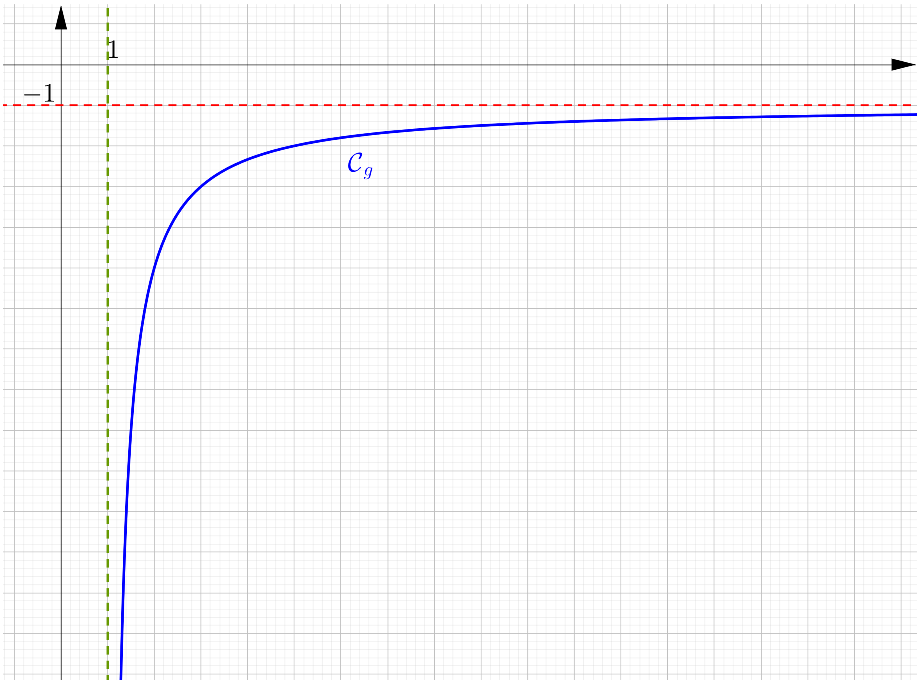
Exercice 7

On a représenté ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. Conjecturer (deviner) les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.



Exercice 8

On a représenté ci-dessous la courbe représentative d'une fonction g définie sur $]1;+\infty[$ et ses asymptotes.



Quelle(s) limites peut-on en déduire ?

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variation est donné par :

x	$-\infty$		-4		-3		$+\infty$
f	5	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

Tracer une courbe dont l'allure correspond à ce tableau de variation. On fera apparaître les asymptotes.