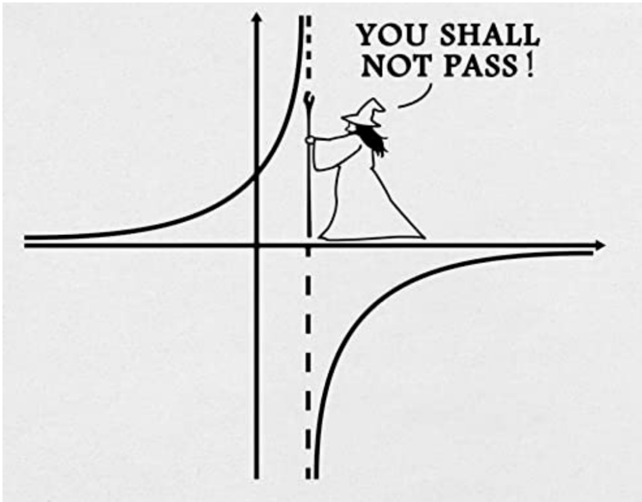
Fonctions 2 : limites



1 Introduction

Activité 1 de la feuille d'exercice : étude de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$

2 Limites

2.1 Limite en un point

Définition

On dit qu'une fonction f définie au voisinage de a admet une limite l quand x tend vers a si $f(x)$ se rapproche indéfiniment de l lorsque x tend vers a.
On écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.
Cette limite l peut être un nombre, ou $+\infty$, ou $-\infty$.

Limites à droite/à gauche

Lorsque x tend vers a en étant uniquement plus grand (resp. plus petit) que a, on parle de limite à droite (resp. à gauche) de f en a.

2.2 Limite en $\pm\infty$

Définition

On dit qu'une fonction f définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) admet une limite l quand x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si $f(x)$ se rapproche indéfiniment de l lorsque x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).
On écrit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$).
Cette limite l peut être un nombre, ou $+\infty$, ou $-\infty$.

Exemple 1 : Soit f définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$.
Déterminons la limite de f en $+\infty$:

x	100	10000	1000000
$\dfrac{2x+1}{x-2}$	2,051020408	2,0005001	2,000005

Nous voyons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$

Exemple 2 : Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4$.
Déterminons la limite de f en $-\infty$:

x	-100	-500	-1000
x^2-4	9996	249996	999996

Nous voyons que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

3 Calcul de limites

3.1 Fonctions de référence

Fonction puissance (n entier naturel non nul) - TRES IMPORTANT

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

Fonction racine

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

3.2 Opérations sur les limites

Limite d'une somme :

Limite de f	Limite de g	Limite de $f+g$
a	b	$a+b$
a	$-\infty$	$-\infty$
a	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

Limite d'un produit :

Limite de f	Limite de g	Limite de $f \times g$
a	b	$a \times b$
$a \neq 0$	∞	∞
0	∞	F.I.
∞	∞	∞

Limite de l'inverse d'une fonction :

Limite de f	Limite de $\frac{1}{f}$
$a \neq 0$	$\frac{1}{a}$
0^+	$+\infty$
0^-	$-\infty$
∞	0

Limite de la composée de deux fonctions :

Limite de f en a	Limite de g en b	Limite de $g \circ f(x)$ en a
b	l	l

3.3 Limite d'une fonction polynomiale ou rationnelle

Méthode

Pour trouver la limite d'un polynôme en $\pm\infty$, en cas de forme indéterminée, on le factorise par le terme de plus haut degré.

Exemple : Soit $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 1$. Calculons la limite de $P(x)$ en $+\infty$.
C'est une forme indéterminée, donc on factorise par x^3 : $f(x) = x^3(1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3})$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}) = 1$
Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$.

Remarque astucieuse : Nous voyons qu'il suffit de calculer la limite du monôme de plus haut degré.
Cherchons par exemple la limite de $Q(x) = -3x^4 + 2x^2 - x + 8$ en $+\infty$.
Le monôme de plus haut degré est $-3x^4$.
Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} Q(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -3x^4 = -\infty$.

Méthode

Pour trouver la limite d'une fraction rationnelle en $\pm\infty$, on factorise le numérateur et le dénominateur par leurs termes de plus haut degré, et on simplifie.

Exemple : Soit $R(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x + 2}$. Calculons la limite de $R(x)$ en $-\infty$.

$$R(x) = \frac{x^2\left(2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1 + \frac{2}{x}\right)} = x \times \frac{2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}}.$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} 2 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} = 2 \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \dfrac{2}{x} = 1 \qquad$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} R(x) = -\infty$.

Remarque astucieuse : Nous voyons qu'il suffit de calculer le quotient des monômes de plus haut degré.

Cherchons par exemple la limite de $Q(x) = \dfrac{x+1}{-x^2+3}$ en $+\infty$.

Le quotient des monômes de plus haut degré est $\dfrac{x}{-x^2} = -\dfrac{1}{x}$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} Q(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} = 0$.

4 Asymptotes

4.1 Courbes asymptotes

Asymptotes

On dit que les courbes de deux fonctions f et g définies au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) sont asymptotes si $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - g(x)) = 0$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - g(x)) = 0$

Exemple : Soit f définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x-1}$ et g définie sur $]1;+\infty[$ par $g(x) = x + 1 - \dfrac{1}{x-1}$.

On a $f(x) - g(x) = \dfrac{x^2+2}{x-1} - \left(x + 1 - \dfrac{1}{x-1}\right) = \dfrac{x^2 + 2 - (x+1)(x-1) + 1}{x-1} = \dfrac{4}{x-1}$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x-1} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - g(x)) = 0$,
donc les courbes de f et de g sont asymptotes en $+\infty$.

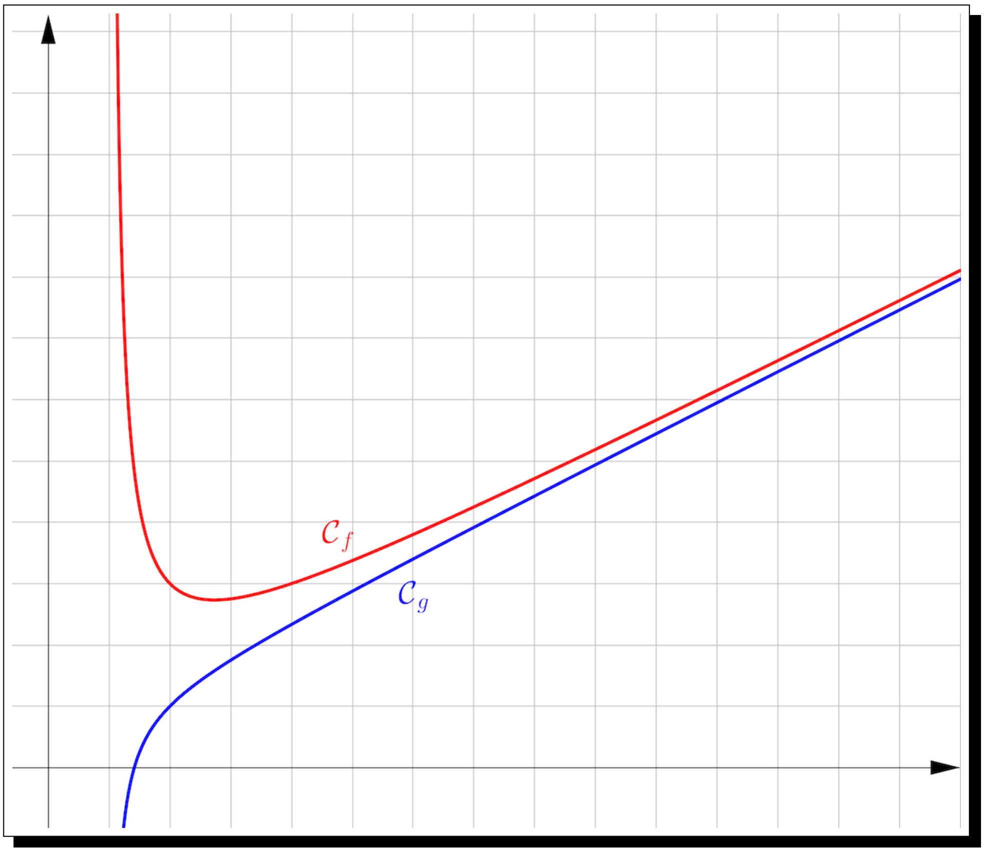


FIGURE 1 – Deux courbes asymptotes en $+\infty$

4.2 Droites asymptotes

4.2.1 Asymptote horizontale

Asymptote horizontale en $+\infty$

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$.
Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$, alors la courbe de f admet une une asymptote horizontale d'équation $y = l$ en $+\infty$.

Asymptote horizontale en $+\infty$

Soit f une fonction définie au voisinage de $-\infty$.
Si $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$, alors la courbe de f admet une une asymptote horizontale d'équation $y = l$ en $-\infty$.

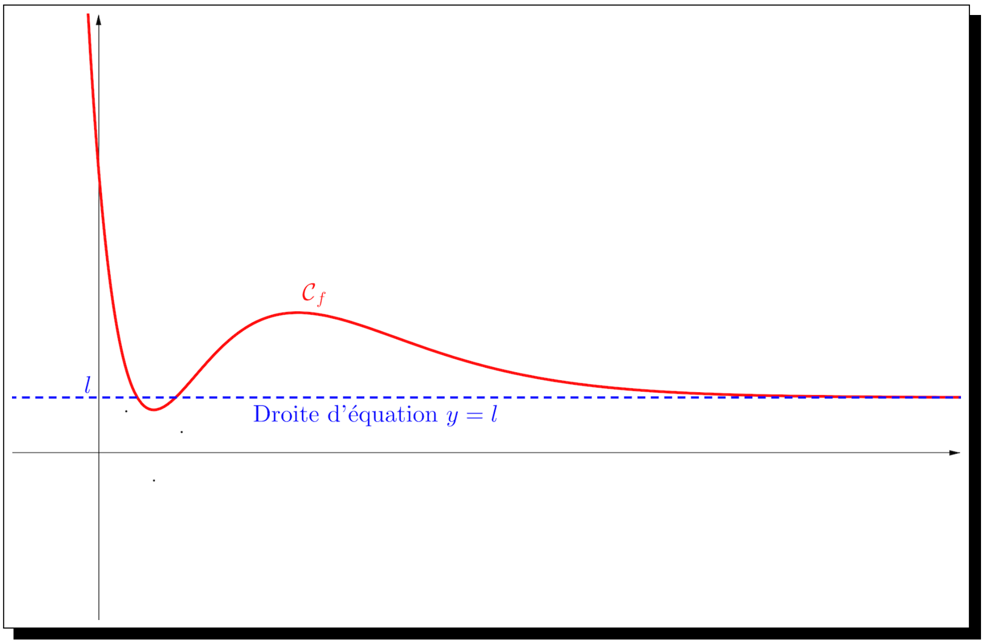


FIGURE 2 – Asymptote horizontale en $+\infty$

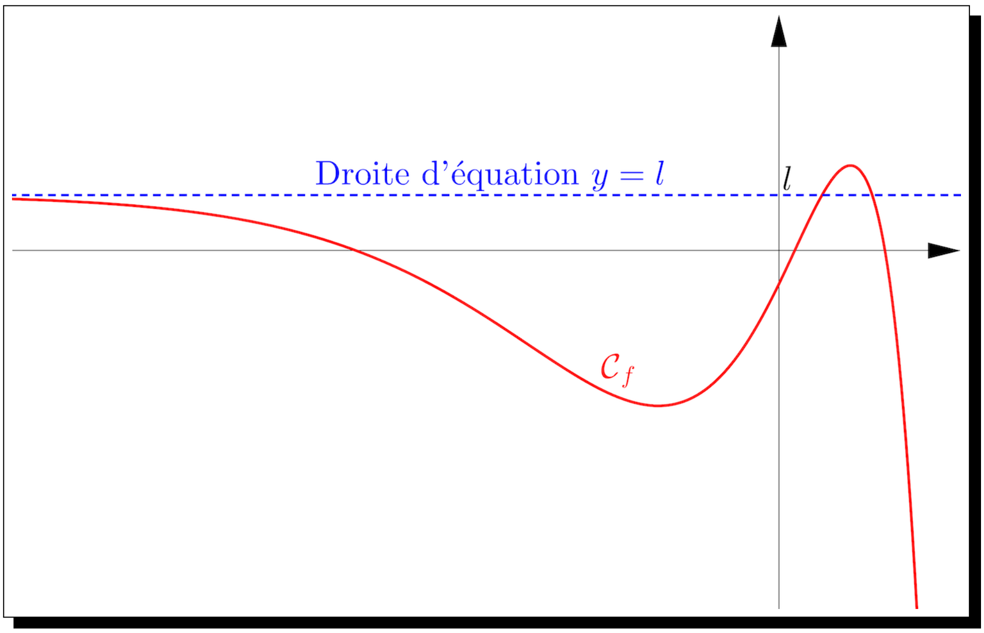


FIGURE 3 – Asymptote horizontale en $-\infty$

4.2.2 Asymptotes verticales

Asymptote verticale

Soit f une fonction définie au voisinage d'un nombre a donné.
Si $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, alors la courbe de f admet une une asymptote verticale d'équation $x = a$.

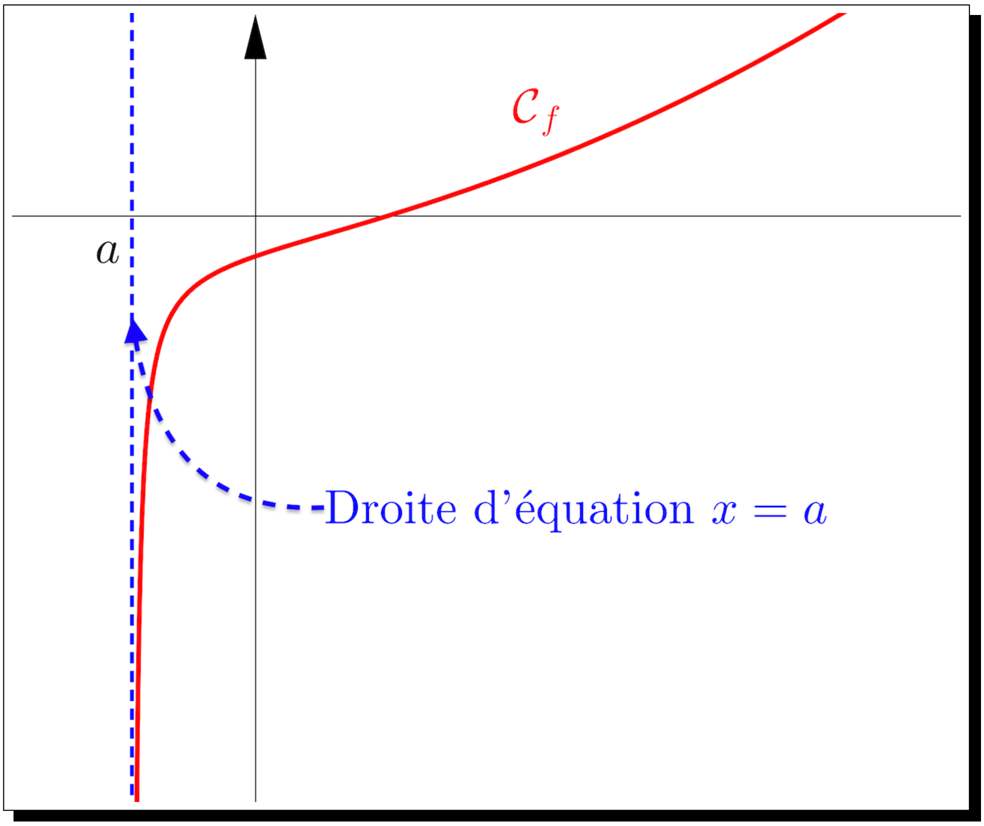


FIGURE 4 – Asymptote verticale lorsque $x \to a$

4.2.3 Asymptotes obliques

Asymptotes obliques

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$.
S'il existe deux nombres a et b tels que $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$.

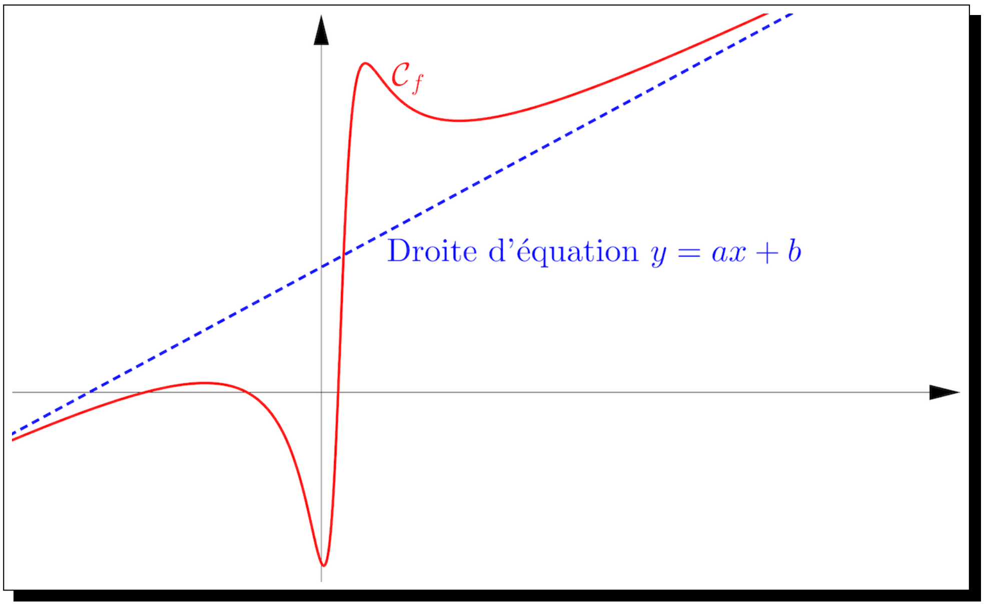


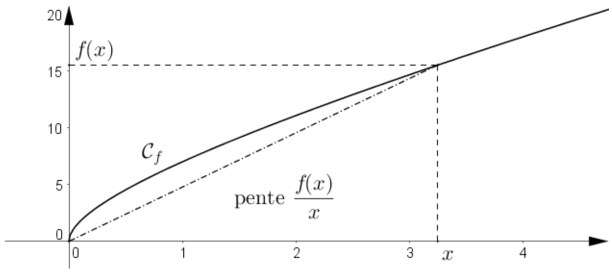
FIGURE 5 –

4.3 Direction asymptotique

Direction asymptotique

On dit que la droite d'équation $y = ax$ est une direction asymptotique de la courbe de la fonction f en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ (resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$).

Exemple : Soit f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 2x + 5\sqrt{x}$.
On a $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{2x + 5\sqrt{x}}{x} = 2 + \dfrac{5}{\sqrt{x}}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$
donc la courbe de f admet la droite d'équation $y = 2x$ comme direction asymptotique en $+\infty$.



Méthode pour trouver une asymptote oblique.

1. On cherche la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ en $+\infty$. Si elle est finie, on la prend comme valeur du coefficient a.
2. On cherche la limite de $(f(x) - ax)$ en $+\infty$.
   (a) Si cette limite est infinie,
   la droite d'équation $y = ax$ est une direction asymptotique de la courbe de f en $+\infty$.
   (b) Si cette limite est finie,
   égale à b, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$.

On peut reprendre tout ce paragraphe en remplaçant $+\infty$ par $-\infty$.

4.4 Branche parabolique

Branche parabolique

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$). Si la limite en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) de $\dfrac{f(x)}{x}$ est égale à $\pm\infty$, on dit que la courbe de f admet une branche parabolique en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).

Exemple : Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 1$.
$\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x^3+1}{x} = x^2 + \dfrac{1}{x}$,
or $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$,
donc $\lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$,
donc la courbe de f admet une branche parabolique en $+\infty$.