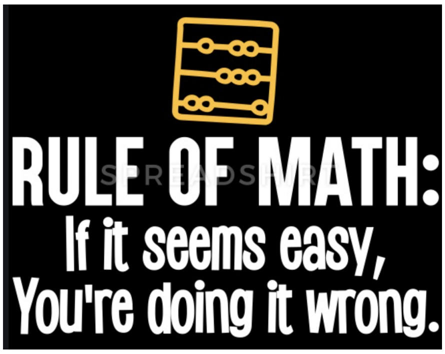
Suites 1



Une suite est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$. On note habituellement u, v, w... cette fonction. Au lieu de noter $u(n)$ on note u_n, la raison étant historique. L'élément de la suite qui porte le numéro zéro est noté u_0, celui porte le numéro un est noté u_1, ..., celui qui porte le numéro 7 est noté u_7, etc. On généralise à tout entier naturel n en notant u_n le nombre qui porte le numéro n. La suite tout entière est notée avec de parenthèses : (u_n).
Les suites constituent un outil efficace pour étudier le comportement de certains phénomènes au cours du temps, comme l'amortissement d'un crédit, ou l'évolution d'un bénéfice.

1 Suites arithmétiques

Suite arithmétique

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmétique si il existe un nombre r tel que pour tout n, $u_{n+1} - u_n = r$. Le nombre r est appelé la raison de la suite.

Exemple : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 3n+1$ pour tout $n \geq 0$ est arithmétique de raison 3. En effet, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} - u_n = (3(n+1)+1) - (3n+1) = (3n+4) - (3n+1) = 3$. Les termes successifs sont 1 ; 4 ; 7 ; 10 ; 13 ; 16 ; 19 etc.
En revanche, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = n^2$ pour tout $n \geq 0$ n'est pas arithmétique. En effet, $v_1 - v_0 = 1$ et $v_2 - v_1 = 3$.

Terme général

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r,
alors pour tout $n \geq 0$, $u_n = u_0 + nr$.

En effet, du terme u_0 au terme u_n, on a ajouté n fois la raison r :
$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} \dots \xrightarrow{+r} u_n$

Remarque : Si la suite (u_n) n'est définie qu'à partir du rang 1, la propriété s'écrit $u_n = u_1 + (n-1)r$.

2 Sommes, symbole Σ

Le symbole Σ permet d'écrire de façon raccourcie une somme. Par exemple, pour écrire la somme S des 100 premiers nombres $S = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + 100$, on écrit $S = \sum_{k=1}^{100} k$

Activité guidée en cours :

Gauss (1777-1855) est surnommé le prince des mathématiques. Incroyablement prolifique, il existe d'innombrables résultats mathématiques portant son nom.

Une anecdote relate également comment Gauss su faire preuve d'un talent remarquable pour le calcul mental. Voulant occuper ses élèves, le professeur demanda de calculer S. Après très peu de temps, le jeune Gauss, alors âgé de 10 ans, impressionne son professeur en donnant la réponse correcte. Sauriez trouver comment ?

Somme des premiers termes

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r,

alors pour tout $n \geq 0$, $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \dfrac{(n+1)(u_0+u_n)}{2} = \dfrac{\text{nbr de termes} \times (\text{premier} + \text{dernier})}{2}$.

Pour se convaincre de cette formule, on écrit la somme $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ de deux façons différentes :

$$2S_n = \begin{cases} u_0 & + & u_1 & + & u_2 & + & \ldots & + & u_n & + \\ u_n & + & u_{n-1} & + & u_{n-2} & + & \ldots & + & u_0 \end{cases}$$

Or pour tout k compris entre 0 et n, $u_k + u_{n-k} = u_0 + kr + u_0 + (n-k)r = u_0 + u_0 + nr = u_0 + u_n$ donc $2S_n = (n+1)(u_0+u_n)$.

Exemple : Reprenons la suite (u_n). La somme de ses 10 premiers termes est égale à :

$$\sum_{k=0}^{9}(3k+1) = \frac{10 \times (u_0 + u_{10})}{2} = \frac{10 \times (1+31)}{2} = 160$$

3 Suites géométriques

Suite géométrique

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite géométrique si il existe un nombre q tel que pour tout n, $u_{n+1} = q \times u_n$. Le nombre q est appelé la raison de la suite.

Exemple : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 3 \times 2^n$ pour tout $n \geq 0$ est géométrique de raison 2. En effet, pour tout $n \geq 0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3 \times 2^{n+1}}{3 \times 2^n} = 2$ donc $u_{n+1} = 2 \times u_n$.
En revanche, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = n^2$ pour tout $n \geq 0$ n'est pas géométrique. En effet, $\dfrac{v_2}{v_1} = 4$ et $\dfrac{v_3}{v_2} = \dfrac{9}{4}$.

Terme général

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q,
alors pour tout $n \geq 0$, $u_n = q^n \times u_0$.

En effet, du terme u_0 au terme u_n, on a multiplié n fois par la raison q :
$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \xrightarrow{\times q} \ldots \xrightarrow{\times q} u_n$

Remarque : Si la suite (u_n) n'est définie qu'à partir du rang 1, la propriété s'écrit $u_n = q^{n-1}u_1$.

Somme des premiers termes

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q,
alors pour tout $n \geq 0$, $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}u_0 = \dfrac{1-q^{\text{nbr de termes}}}{1-q} \times$premier terme.

Pour se convaincre de cette formule, on écrit la somme $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ en regard de la somme $q \times S_n$:

$$\begin{cases} S_n &= u_0 + qu_0 + q^2u_0 + \ldots + q^nu_0 \\ q \times S_n &= \phantom{u_0 +{}} qu_0 + q^2u_0 + \ldots + q^nu_0 + q^{n+1}u_0 \end{cases}$$

Donc $S_n - qS_n = u_0 - q^{n+1}u_0$, donc $(1-q)S_n = (1-q^{n+1})u_0$, donc $S_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}u_0$.

Exemple : Reprenons la suite (u_n). La somme de ses 5 premiers termes est égale à :

$$\sum_{k=0}^{4}(3 \times 2^k) = \frac{1-2^5}{1-2}u_0 = \frac{-31}{-1} \times 3 = 93$$

4 Suites arithmético-géométriques

Suite arithmético-géométrique

On appelle suite arithmético-géométrique toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout n, $u_{n+1} = au_n + b$, où a et b sont deux nombres réels donnés.

Nous allons voir une méthode qui permet d'exprimer le terme général de toute suite arithmético-géométrique.

Commençons par un exemple :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{R}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & 3u_n - 1 \text{ pour tout } n \geq 0 \end{cases}$

On introduit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{R}}$ définie par $v_n = u_n - \alpha$ pour tout $n \geq 0$, et on cherche une valeur de α pour laquelle la suite (v_n) serait une suite géométrique. Pour cela on doit avoir $v_{n+1} = q \times v_n$ pour tout $n \geq 0$.

Or $v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = 3u_n - 1 - \alpha = 3u_n - (1+\alpha)$, qui doit être égal pour tout $n \geq 0$ à $q \times v_n = q(u_n - \alpha) = qu_n - q\alpha$.

Pour que ça marche, il faut que $q = 3$ et que $1 + \alpha = 3\alpha \Leftrightarrow 1 = 2\alpha \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{1}{2}$.

On a bien $v_{n+1} = 3u_n - 1 - \dfrac{1}{2} = 3(u_n - \dfrac{1}{2})$.

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{R}}$ est une suite géométrique de raison 3.

Donc $v_n = 3^n \times v_0$, donc $u_n - \dfrac{1}{2} = 3^n(u_0 - \dfrac{1}{2})$ donc $u_n = 3^n \times \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}$.

Méthode

Première étape	On trouve le nombre α tel que pour tout n, $u_{n+1} - \alpha = a(u_n - \alpha)$
Deuxième étape	La suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \alpha$ est géométrique de raison a donc pour tout n, $v_n = a^n v_0$
Troisième étape	On en déduit que pour tout n, $u_n = a^n(u_0 - \alpha) + \alpha$

5 Raisonnement par récurrence

5.1 Le principe

$\mathcal{P}_n$ est une propriété dépendant d'un entier naturel n dont on veut montrer qu'elle est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Principe de démonstration (à connaître par coeur)

Initialisation.
Pour $n = n_0$, on vérifie que la propriété $\mathcal{P}_{n_0}$ est vraie.
Hérédité.
Il faut montrer que :
Pour tout entier $n \geq n_0$, si la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie alors la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
Conclusion.
D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel $n \geq n_0$, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Le raisonnement par récurrence est un principe logique qui aboutit à la conclusion qu'une propriété dépendant d'un entier naturel n est vraie pour toutes les valeurs de n. Il importe d'être très précis quant à sa rédaction.

Un exemple : Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{1+3+5+7+\ldots+(2n+1)=\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=(n+1)^2}$$

1. On annonce clairement ce qu'on va démontrer

On pose $\boxed{\mathcal{P}_n : \sum_{k=0}^{n}(2k+1)=(n+1)^2}$.
Je veux démontrer que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

2. On initialise au premier rang ($n=0$ ou $n=1$ généralement)

La propriété $\mathcal{P}_n$ pour $n=0$ s'écrit : $1=1$ Est-ce vrai ? Oui ! Donc la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.

3. On montre l'hérédité $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$

On choisi $n \in \mathbb{N}$ et on suppose la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=(n+1)^2 \qquad \text{(supposé vrai)}}$$

On va montrer alors que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, c'est à dire que :

$$\sum_{k=0}^{n+1}(2k+1)=(n+1+1)^2$$

ce qui s'écrit :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n+1}(2k+1)=(n+2)^2 \qquad \text{(Ce qui doit être démontré)}}$$

Pour montrer cette égalité, on compare ce qu'il y a des deux côtés :

- D'une part :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1}(2k+1) &= \sum_{k=0}^{n}(2k+1)+(2n+3)\\ &= (n+1)^2+(2n+3) \qquad \text{(on applique l'hypothèse de récurrence)}\\ &= n^2+2n+1+2n+3\\ &= n^4+4n+4\end{aligned}$$

- D'autre part : $(n+2)^2=n^2+4n+4$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

4. Conclusion

D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, la propriété $\mathcal{P}_n$ est bien vraie.

5.2 Nécessité de l'initialisation

Voici l'exemple d'une propriété héréditaire mais toujours fausse.
$\mathcal{P}_n$: « Le nombre $2n+1$ est pair ».
La propriété $\mathcal{P}_n$ est héréditaire :
Pour tout $n \geq 0$, si $\mathcal{P}_n$ est vraie, alors $2(n+1)+1 = 2n+2+1 = 2n+1+2$
or on a supposé que $2n+1$ est pair, donc $2n+1+2$ est pair,
donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Bien entendu c'est toujours faux, car $2n+1$ est toujours un nombre impair. Il est donc nécessaire de vérifier l'initialisation, l'hérédité seule ne suffit pas.