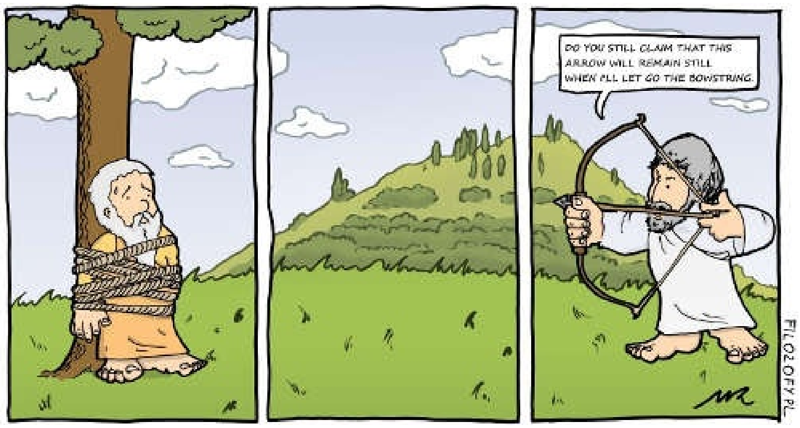
Séries

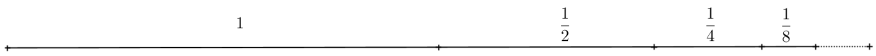


1 Introduction : ajouter une infinité de nombres

Nous allons voir avec les séries numériques que lorsque l'on ajoute une infinité de nombres, il arrive que le résultat soit un nombre fini.

1.1 Premier exemple

On ajoute les nombres $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\ldots$. Le schéma ci-dessous convainc que cette somme ne dépassera jamais 2 :



Il convainc même que la somme $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}$, que l'on peut aussi écrire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}$, a pour limite, lorsque n tend vers $+\infty$, le nombre 2.

On dit que la série $\displaystyle\sum_{k}\frac{1}{2^k}$ converge, que sa somme est égale à 2, et on écrit : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}=2$.

Définition

Une série $\displaystyle\sum_{k} u_k$ de terme général u_k est dite convergente lorsque la suite (S_n) définie pour tout entier n par $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ converge, c'est-à-dire tend vers une limite finie.

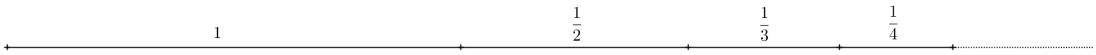
Le cas échéant, si s est la limite de (S_n), on note $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = s$.

1.2 Deuxième exemple

On ajoute une infinité de fois le nombre 1. La suite (S_n) vaut $S_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$, qui tend vers $+\infty$. La série $\sum 1$ ne converge pas : on dit qu'elle diverge.

1.3 Troisième exemple (non traité en classe)

On ajoute les nombres $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$



Pour se convaincre que cette somme devient plus grande que n'importe quel nombre, on peut regrouper ses termes de la façon suivante :

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

Chaque groupe est de la forme $\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}}$, qui contient 2^n termes tous supérieurs à $\frac{1}{2^{n+1}}$, donc le groupe entier est supérieur à $2^n \times \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$.

Ainsi, en ajoutant des groupes plus grands que $\frac{1}{2}$ en nombre infini, on est sûr de dépasser n'importe quel nombre.

2 Propriétés

Condition nécessaire de convergence

Pour qu'une série converge, il est **nécessaire** que son terme général tende vers 0.
En revanche, comme nous l'avons vu ci-dessus, cette condition n'est pas suffisante.

Propriété de linéarité

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors pour tous a, $b \in \mathbb{R}$ la série $\sum (a.u_n + b.v_n)$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (au_n + bv_n) = a.\sum_{n=0}^{\infty} u_n + b.\sum_{n=0}^{\infty} v_n$$

3 Série géométrique

Définition

On appelle série géométrique la série $\sum_k x^k$ des puissances d'un nombre x.

Lorsque $x \in]-1;1[$, la série converge et a pour somme $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \dfrac{1}{1-x}$.

Lorsque $x \notin]-1;1[$, la série diverge.

Commençons par $x \in]-1;1[$: Pour tout entier n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$.
Or $\lim_{n\to+\infty} x^{n+1} = 0$, donc (S_n) tend vers $\dfrac{1}{1-x}$.

Par ailleurs, lorsque $x \notin]-1;1[$, le terme général x^k de la série ne tend pas vers 0, donc la série diverge nécessairement.

Exemple. Le premier exemple donné plus haut correspond à $x = \dfrac{1}{2}$.
Sa somme est en effet $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^k = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

4 Série exponentielle

Définition

On appelle série exponentielle la série $\sum_k \dfrac{x^k}{k!}$.

La série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ et a pour somme e^x (résultat admis).

Exemple.
Ainsi, pour $x = 1$ on obtient $1 + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{24} + \dfrac{1}{120} + \dfrac{1}{720} + \ldots = e^1 = e$.

Pour $x = -1$ on obtient $1 - 1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{24} - \dfrac{1}{120} + \dfrac{1}{720} - \ldots = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$.

Pour $x = 2$ on obtient $1 + 2 + \dfrac{4}{2} + \dfrac{8}{6} + \dfrac{16}{24} + \dfrac{32}{120} + \dfrac{64}{720} + \ldots = e^2$.

5 Série absolument convergente

Définition

Une série $\sum_k u_k$ est dite absolument convergente si la série $\sum_k |u_k|$ est convergente.

Théorème

Toute série absolument convergente est convergente.