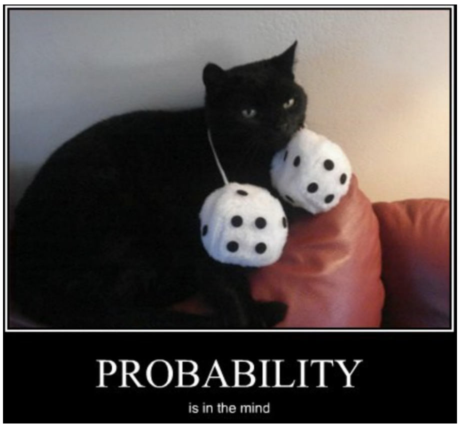
Probabilité : Théorème de transfert



1 Théorème de transfert

Étant donnée une fonction g et une variable aléatoire X, on peut fabriquer une variable aléatoire $g(X)$ qui prend les valeurs $g(x_i)$ avec les probabilités $P(X = x_i)$.

Exemple.
Plaçons-nous dans la situation suivante, rencontrée au précédent chapitre sur les probabilités : on tire au hasard deux boules simultanément dans une urne contenant 2 boules blanches et 4 boules noires indiscernables au toucher. On note N la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées.
La loi de probabilité de N est :

n_i	0	1	2
$P([N = n_i])$	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{6}{15}$

Si g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2$, la variable aléatoire $g(N) = N^2$ a pour loi de probabilité :

n_i	0	1	4
$P([N = n_i])$	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{6}{15}$

Théorème de transfert.

Pour toute fonction g à valeurs réelles, et toute variable aléatoire X,

$$E(g(X)) = \sum_i g(x_i) P(X = x_i)$$

Exemple.
Ici, $E(N^2) = 0 \times \frac{1}{15} + 1 \times \frac{8}{15} + 4 \times \frac{6}{15} = \frac{32}{15}$.

2 Variance d'une variable aléatoire

Définition

On appelle variance d'une variable aléatoire X la grandeur :

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_i (x_i - E(X))^2 \times P(X = x_i)$$

La variance mesure la dispersion des valeurs prises par X autour de l'espérance.
On appelle écart type de la variable aléatoire X la grandeur : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exemple :
L'espérance de N est $E(N) = 0 \times \frac{1}{15} + 1 \times \frac{8}{15} + 2 \times \frac{6}{15} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$.
La variance de N est $V(N) = (0 - \frac{4}{3})^2 \times \frac{1}{15} + (1 - \frac{4}{3})^2 \times \frac{8}{15} + (2 - \frac{4}{3})^2 \times \frac{6}{15} = \frac{16}{135} + \frac{8}{135} + \frac{24}{135} = \frac{48}{135} = \frac{16}{45}$.
L'écart type de N est $\sigma(N) = \sqrt{\frac{16}{45}} = \frac{4}{3\sqrt{5}}$.

Remarque : Une variable aléatoire dont la variance est nulle est une variable aléatoire constante.

Formule de Koenig-Huygens.

Pour toute variable aléatoire X, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
V(X) &= \sum_i (x_i - E(X))^2 \times P(X = x_i) \\
&= \sum_i (x_i^2 - 2x_i E(X) + E(X)^2) \times P(X = x_i) \\
&= \sum_i x_i^2 \times P(X = x_i) - 2E(X) \sum_i x_i P(X = x_i) + E(X)^2 \sum_i P(X = x_i) \\
&= E(X^2) - 2E(X) \times E(X) + E(X)^2 \times 1 = E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 \\
&= E(X^2) - E(X)^2
\end{aligned}$$

Exemple : Reprenons l'exemple précédent :
$V(N) = E(N^2) - E(N)^2 = \frac{32}{15} - \frac{16}{9} = \frac{96}{45} - \frac{80}{45} = \frac{16}{45}$ et on retrouve bien sûr le résultat ci-dessus.

Propriété.

Pour toute variable aléatoire X, et pour tout nombres réels a et b, $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

Exemple. Supposons qu'une boule noire rapporte 3 € et qu'une boule blanche fasse perdre 1 €. On note G le gain algébrique à l'issue d'un tirage.

Les N boules noires tirées rapportent $3N$ €.

Les $2-N$ boules restantes, forcément blanches, font perdre $2-N$ €.

Par conséquent, $G = 3N - (2-N) = 4N - 2$.

Alors $E(G) = E(4N-2) = 4E(N) - 2 = 4 \times \frac{4}{3} - 2 = \frac{10}{3}$,

et $V(G) = V(4N-2) = V(4N) = 16V(N) = 16 \times \frac{16}{45} = \boxed{\frac{256}{45}}$.

3 Variable aléatoire centrée réduite

Définition.

Étant donnée une variable aléatoire X, on appelle variable aléatoire centrée la variable aléatoire $X_c = X - E(X)$. Son espérance est nulle.

Exemple. $N_c = N - \frac{4}{3}$ et a pour loi de probabilité :

c_i	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$P([N_c = c_i])$	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{6}{15}$

On peut vérifier que $E(N_c) = -\frac{4}{3} \times \frac{1}{15} - \frac{1}{3} \times \frac{8}{15} + \frac{2}{3} \times \frac{6}{15} = 0$.

Définition.

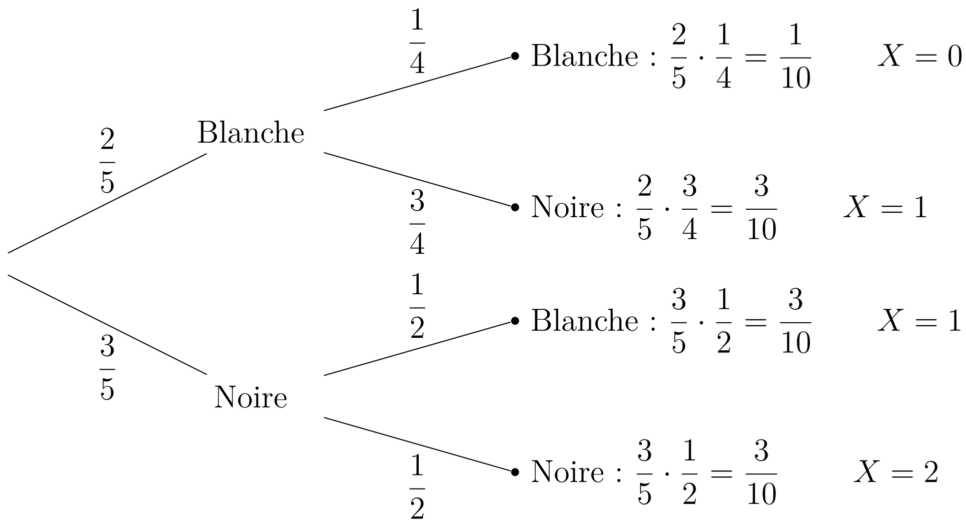
Étant donnée une variable aléatoire X, on appelle variable aléatoire centrée réduite la variable aléatoire

$$\boxed{X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}}$$

Son espérance est nulle est son écart type est égal à 1.

Exemple.

On tire au hasard deux boules dans une urne contenant deux boules blanches et trois boules noires, et on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.



- La loi de X est :

x_i	0	1	2
$P([N = x_i])$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

- L'espérance de X est $E(X) = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{6}{10} + 2 \times \frac{3}{10} = \frac{12}{10} = \boxed{\frac{6}{5}}$.
- Par ailleurs $E(X^2) = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{6}{10} + 4 \times \frac{3}{10} = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$.

  La variance est donc $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{9}{5} - \frac{36}{25} = \boxed{\frac{9}{25}}$
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \boxed{\frac{3}{5}}$.
- Déterminons la loi de la variable aléatoire centrée réduite $X^* = \frac{X - \frac{6}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}X - 2$:

x_i^*	-2	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
$P([X^* = x_i^*])$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$