Séance n$^{\text{o}}$ 1

Ce problème a pour objet l'étude de certains cônes dans des espaces euclidiens.
Il constitue une bonne base de révision d'algèbre linéaire et de géométrie dans les espaces euclidiens.
Travailler ce problème en soignant particulièrement la rédaction.
Bon travail ! !

⋆ ⋆ ⋆

On désigne par E l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$), par $(\cdot|\cdot)$ son produit scalaire usuel, et par $\|\cdot\|$ la norme associée. Pour toute partie X de E, on note $X^\perp$ (resp. X^+) l'ensemble des éléments x de E satisfaisant $(x|y) = 0$ (resp. $(x|y) \geq 0$) pour tout y de X.

Une partie C de E sera appelée *cône à faces* s'il existe une famille finie d'éléments $c_1, \ldots, c_r$ ($r > 0$) de E telle que C soit l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \geq 0$. On supposera toujours les c_i non nuls, et on dira qu'ils *engendrent* C. Enfin on appelle *face* de C toute partie de C de la forme $C \cap \{w\}^\perp$ avec $w \in C^+$.

La première partie est indépendante des suivantes.

Première partie

1. Vérifier que tout sous-espace vectoriel non nul de E est un cône à faces.

2. Supposant $n = r = 2$, décrire (sans démonstration mais avec des figures) les ensembles C, C^+ et donner sous chaque figure la liste des faces de C suivant les diverses positions relatives de c_1 et c_2.

3. Supposant que $n = r = 3$ et que (c_1, c_2, c_3) est une base orthogonale de E, décrire sans démonstration C, C^+ et les faces de C.

Deuxième partie

On se propose, dans cette partie, de démontrer que tout cône à faces est fermé dans E.

4. **a)** Soit K une partie compacte de E ne contenant pas 0. Montrer que l'ensemble des éléments de la forme λx, où $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et $x \in K$, est fermé dans E.

b) Ce résultat subsiste-t-il si l'on suppose K seulement fermé, ou si K, compact, contient 0 ?

5. On considère maintenant un cône à faces C engendré par des éléments $c_1, \ldots, c_r$.

a) Montrer que C est fermé lorsqu'il ne contient aucune droite vectorielle. [On pourra introduire l'ensemble K des éléments $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i$ avec $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$.]

b) Soit V un sous-espace vectoriel de E (éventuellement réduit à 0) contenu dans C et distinct de C. On note P le projecteur orthogonal de E sur $V^\perp$. Vérifier que $P(C)$ est un cône à faces contenu dans C.

c) Supposant que $P(C)$ contient une droite vectorielle, construire un sous-espace vectoriel de E contenu dans C et contenant strictement V.

d) Montrer que C est fermé dans E.

Troisième partie

6. On se propose ici de démontrer que tout cône à faces C vérifie $(C^+)^+ = C$.

a) Soit a un élément de E. Montrer que la fonction réelle définie sur C par $c \mapsto \|c-a\|$ atteint sa borne inférieure en un point unique de C. On le notera $p(a)$.

b) Déterminer le signe de $(p(a)-a|c)$ lorsque $c \in C$, ainsi que la valeur de $(p(a)-a|p(a))$.

c) Conclure.

Quatrième partie

On souhaite maintenant démontrer que tout cône à faces est l'intersection d'une famille finie de demi-espaces fermés (on appelle *demi-espace fermé* tout sous-ensemble de E de la forme $\{a\}^+$ avec $a \in E$, $a \neq 0$).

7. Démontrer l'équivalence des conditions suivantes relatives à un cône à faces C :
(α) le sous-espace vectoriel de E engendré par C est égal à E ;
(β) l'intérieur de C est non vide.

8. On suppose dans cette question les conditions de la question **7.** satisfaites pour un cône à faces C.

a) Démontrer l'équivalence des conditions suivantes relatives à un élément x de C :
(α') x est un point frontière de C ;
(β') x appartient à une face de C distincte de C.

b) Que subsisterait-il de ce résultat si l'on ne supposait pas satisfaites les conditions de la question **7.** ?

c) Soit x un point de E n'appartenant pas à C. Construire une face F de C, distincte de C et ayant la propriété suivante : pour tout $w \in C^+$ tel que $F = C \cap \{w\}^\perp$, on a $(x|w) < 0$. [On pourra considérer le segment de droite joignant x à un point x_0 de l'intérieur de C].

9. **a)** Montrer que l'ensemble des faces d'un cône à faces est fini.

b) Montrer que tout cône à faces est l'intersection d'une famille finie de demi-espaces fermés.

10. Déduire de ce qui précède que, si C est un cône à faces, il en est de même de C^+.

⋆ ⋆
⋆