Devoir maison 2

A rendre pour le 16 mars.

Exercice 1

On note A, B, C les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}$$

Trouver parmi ces trois matrices deux matrices qui commutent.

Exercice 2 (d'après ESC 2007)

Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les produits matriciels $A(A-I)$ et $B(B-I)$.
2. En déduire que $A^2 = A$ et $B^2 = B$.
3. Calculer AB et BA.
   On note dans toute la suite $W = A + 2B$.
4. Calculer les produits $A\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
5. En déduire que $W\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
6. Montrer que $W^2 = A + 4B$
7. Plus généralement, montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $W^n = A + 2^n B$.