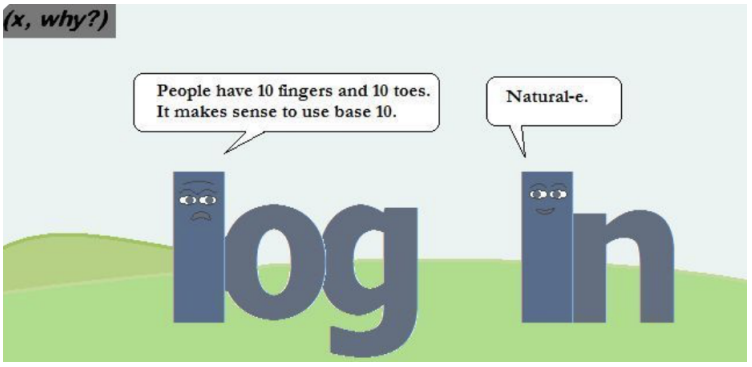
Fonctions logarithmes et exponentielles



1 Fonction logarithme népérien

1.1 Définition et propriétés algébriques

Point historique : La découverte des fonctions logarithmes est souvent attribuée à John Napier (son nom francisé à donné « Néper »), ce qui n'est pas tout à fait exact. Tout d'abord parce que le concept de fonction est apparue bien postérieurement à lui. Et deuxièmement parce qu'en réalité les premières tables de correspondance logarithmique sont attribuées à Henry Briggs (1556-1630). Néanmoins ces tables sont le fruit d'une volonté de répondre à un problème de calcul : comment calculer plus rapidement des produits ou des quotients de grands nombres strictement positifs. L'idée qui a germé chez Briggs et Napier est de disposer d'une correspondance qui permet de ramener un calcul de produit à un calcul de somme. Dans des termes modernes le problème se reformule de la façon suivante :

Trouver une fonction f bijective qui vérifie $f(a \times b) = f(a) + f(b)$ pour tout a et b positifs. (propriété $(\star)$)

Propriétés des fonctions qui vérifient $(\star)$

Si f vérifie $(\star)$ alors pour tout a et b positifs :

1. $f(1) = 0$
2. $f(a^n) = n.f(a)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
3. $f(\frac{a}{b}) = f(a) - f(b)$
4. $f(\frac{1}{b}) = -f(b)$

Preuve détaillée en classe :

1. On choisi de prendre $a = 1$, donc $f(1) = f(1) + f(1)$, donc $f(1) = 0$.
2. Par récurrence.
3. On part de l'égalité $b \times \dfrac{a}{b} = a$, et on se sert de la propriété $(\star)$.
4. On choisi $a = 1$ dans la relation précédente.

1.2 Le logarithme à base 10

On remarque que si l'on impose une valeur pour la fonction f, on pourra définir l'image de toute autre valeur. Historiquement l'idée qui s'est imposée est d'utiliser la base 10 et de prendre $f(10) = 1$. La fonction ainsi définie est noté log.

Logarithme à base 10

Il existe une unique fonction notée $\log$ vérifiant la propriété $(\star)$ ainsi que $\log(10) = 1$

En utilisant le fait que $2^{10} \approx 1000$, et les propriétés $(\star)$, remplir le tableau suivant de valeur de log :

x	0,01	0,1	0,5	**1**	2	4	5	8	**10**	20	80	100	1000	10000
$\log(x)$	-2	-1	-0,3	**0**	0,3	0,6	0,7	0,9	**1**	1,3	1,9	2	3	4

1.3 Logarithme néperien

Une autre base a ensuite émergée, suite à des calculs d'aire sous la courbe de l'hyperbole. La nouvelle base est $e \simeq 2,72$ où le symbole e a été choisi en hommage à Euler.

Théorème d'existence

Il existe une unique fonction notée $\ln$, définie sur $]0;+\infty[$,vérifiant la propriété $(\star)$ et vérifiant de plus $\ln(e) = 1$ où

$$e \simeq 2,7182818284$$

On a alors pour tout nombres a et b strictement positifs, et tout entier naturel n :

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
- $\ln(a^n) = n \ln a$
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$

Exemple :

- $\ln 6 = \ln(3 \times 2) = \ln 3 + \ln 2$
- $\ln 27 = \ln(3^3) = 3 \ln 3$
- $\ln \dfrac{5}{4} = \ln 5 - \ln 4 = \ln 5 - 2 \ln 2$
- $\ln 0,2 = \ln \dfrac{1}{5} = -\ln 5$

1.4 Dérivée

Propriété / Définition

La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ avec :

$$\boxed{\ln'(x) = \frac{1}{x}}$$

Remarque : Cette fonction est nommée “natural logarithm” chez les anglo-saxons. Essayez alors de comprendre le sens de la blague de l’image p.1.

1.5 Courbe représentative et tableau de signe

Sens de variation

Puisque $\frac{1}{x} > 0$ pour tout $x > 0$, la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

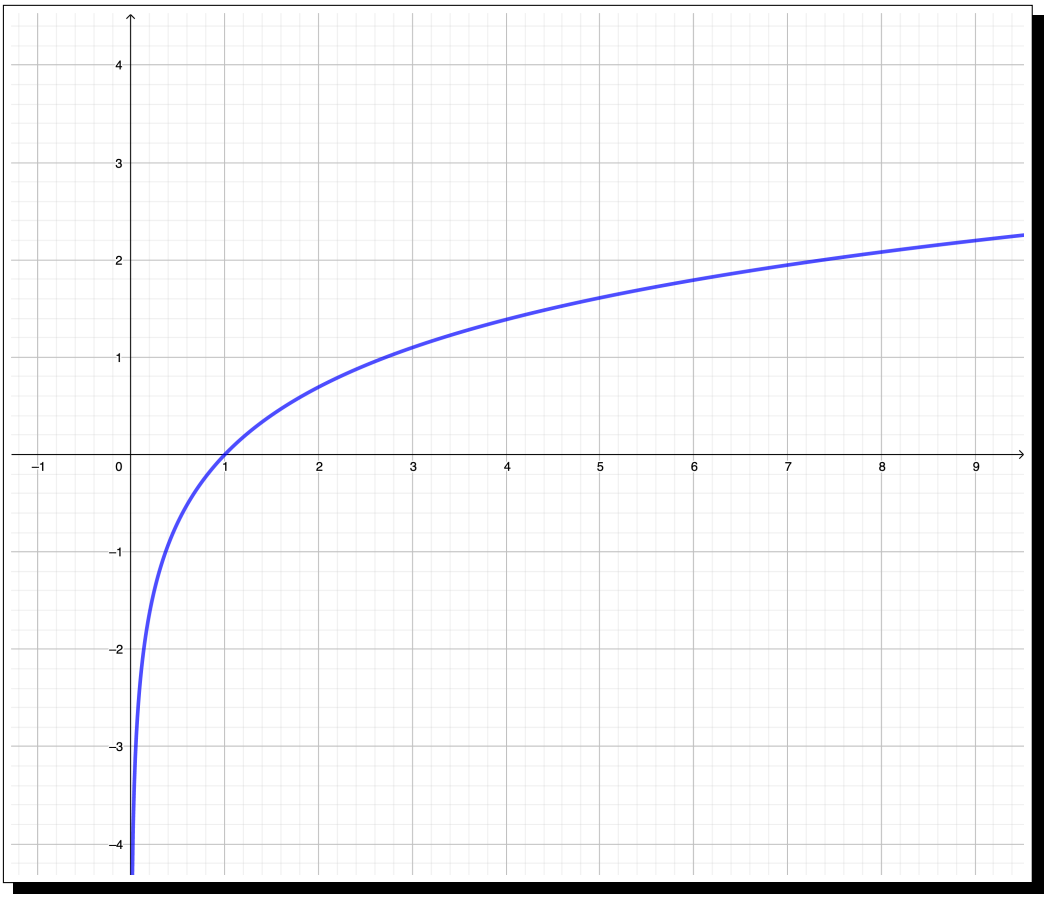


FIGURE 1 – $x \mapsto \ln x$

Le tableau de variation :

x	0		1		e		$+\infty$
Signe de $\frac{1}{x}$	‖		$+$				
Variation de ln	‖ $-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$

1.6 Dérivée d'une fonction composée

Dérivée d'une composée avec le logarithme

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

Plus précisément : Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $g(x) = \ln u(x)$ est dérivable sur I et $g'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Exemple : Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \ln(1 + x^2)$. Calculer $g'(x)$.

g est de la forme $\ln u$ avec $u(x) = 1 + x^2$

u est strictement positive et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 2x$. Donc :

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x}{1 + x^2}$$

1.7 Limites

Théorème

$\lim\limits_{x \to 0+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

En particulier, la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe de ln.

Idée de la preuve :

$\ln(10^n) = n.\ln(10)$, donc quand $n \to \infty$, on obtient « $\ln(+\infty) = +\infty$ » [1]

Puis $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$, donc quand $x \to \infty$, on obtient « $\ln(0^+) = -\infty$ » [2]

1. On rappelle que cette écriture n'est sont pas tout à fait correcte mais qu'elle permet de mémoriser la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.
2. Idem.

2 Fonction exponentielle

Définition

La fonction exponentielle est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien

$$\begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \xrightarrow{\ln} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = \ln(x) \\ ]0;+\infty[& \xleftarrow{\exp} & \mathbb{R} \\ x = \exp(y) & \longleftarrow\!\shortmid & y \end{array}$$

On constate que la fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$, **et positive**, et que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\ln(\exp(y)) = y$.

2.1 Propriété algébrique

Théorème

Pour tout nombres réels a et b, et tout entier naturel n,

- $\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$
- $\exp(n \times a) = (\exp a)^n$
- $\exp(a-b) = \dfrac{\exp a}{\exp b}$
- $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$

Conséquence IMPORTANTE

Par analogie avec les propriétés des fonctions puissances, nous noterons e^x pour $\exp(x)$.

2.2 Résolution d'équation

Tout repose sur le fait suivant : Si $a > 0$ et b de signe quelconque,

$$\boxed{\ln(a) = b \iff a = \exp(b)}$$

Exemples :

1. Résoudre $2\ln(x) - 3 = 0$.

$$\begin{aligned} 2\ln(x) - 3 = 0 &\iff 2\ln(x) = 3 \\ &\iff \ln(x) = \frac{3}{2} \\ &\iff \boxed{x = e^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

2. Résoudre $2e^x - 3 = 0$.

$$\begin{aligned} 2e^x - 3 = 0 &\iff 2e^x = 3 \\ &\iff e^x = \frac{3}{2} \\ &\iff \boxed{x = \ln\left(\frac{3}{2}\right)} \end{aligned}$$

2.3 Dérivée

Si on dérive la relation $\ln(\exp(y)) = y$, on obtient $\exp'(y) \times \dfrac{1}{\exp(y)} = 1$, c'est-à-dire que $\exp'(y) = \exp(y)$. La fonction exponentielle est égale à sa dérivée !

Plus généralement on a :

Dérivée d'une fonction composée (TRES IMPORTANT)

$$\boxed{(e^u)' = u'e^u}$$

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $g(x) = e^{u(x)}$ est dérivable sur I et

$$\boxed{g'(x) = u'(x)e^{u(x)}}$$

Exemple : Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-2x}$.
g est de la forme e^u avec $u(x) = -2x$
u est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = u'(x)e^{u(x)} = -2e^{-2x}$.

2.4 Courbe représentative

Dans un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction exponentielle est la symétrique de celle de ln par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Attention : si le repère n'est pas orthonormé, cette propriété n'est plus vraie.

Nous voyons en particulier que $\exp(0) = 1$.

La tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $\exp(x)$		$+$	
Variation de exp	0 ↗	1	↗ $+\infty$

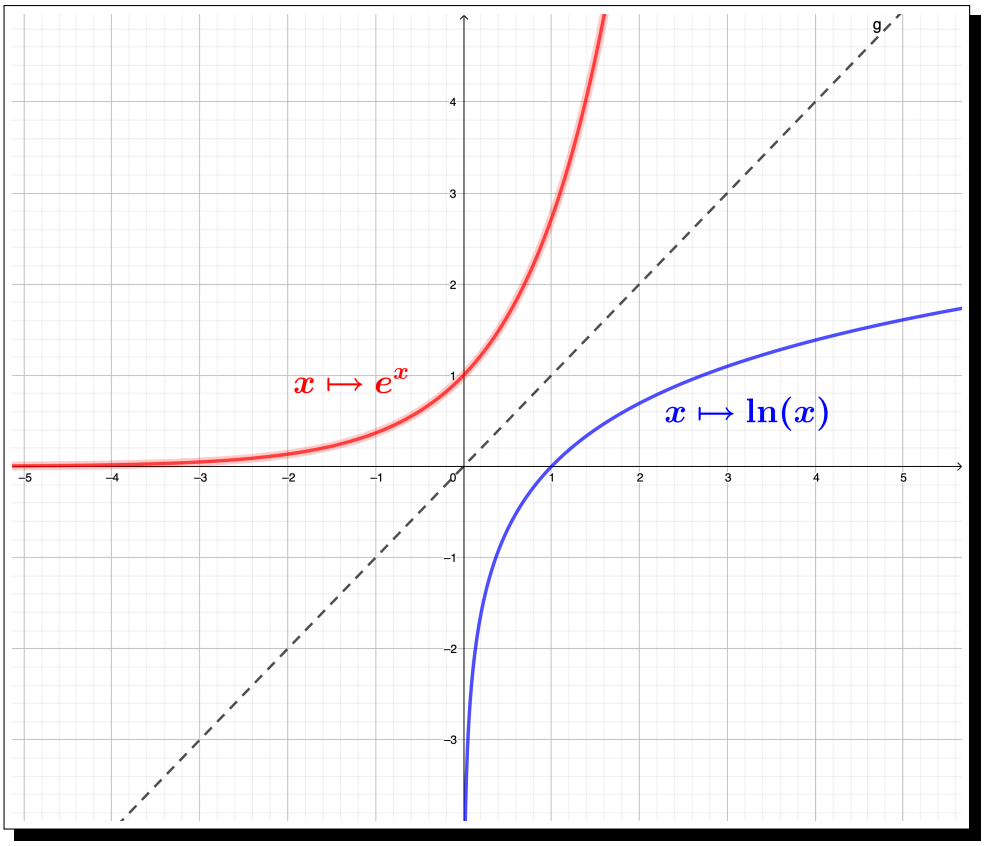


FIGURE 2 –

2.5 Limites

Théorème

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

3 Fonctions puissances

Fonctions puissances

On appelle fonction puissance toute fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $x \mapsto x^a = e^{a \ln x}$ où a est un nombre réel.

Remarque :

Dans le cas où a est un entier n, on retrouve les fonctions puissances déjà connues : $e^{n \ln x} = e^{\ln x^n} = x^n$.

Propriétés

Pour tout nombre x positif, et tout nombres réels a et b,

- $x^{a+b} = x^a \times x^b$
- $x^{a-b} = \dfrac{x^a}{x^b}$
- $x^{n\times a} = \left(x^a\right)^n$
- $x^{-a} = \dfrac{1}{x^a}$

Cas particuliers :

Pour $a = \dfrac{1}{2}$, la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{2}}$ est la fonction racine carrée.

Pour $a = \dfrac{1}{3}$, la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$ est la fonction racine cubique.

Pour $a = -1$, la fonction $x \mapsto x^{-1}$ est la fonction inverse.

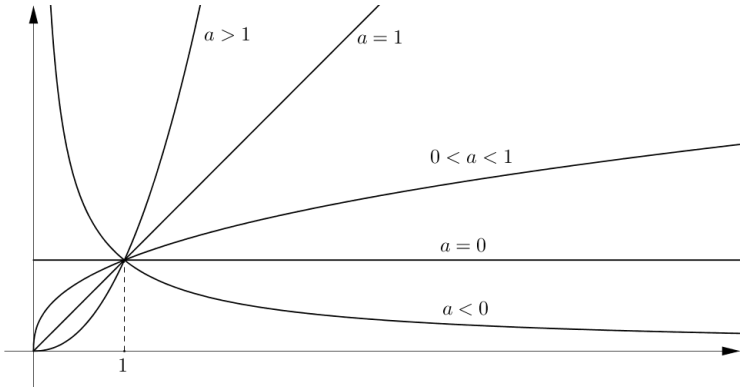


FIGURE 3 – Graphes des différentes fonctions puissances

Dérivée :

Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^a$, où a est un nombre réel. Alors $f'(x) = ax^{a-1}$.

4 Croissances comparées

Théorème de croissance comparée (TRES IMPORTANT)

En cas de forme indéterminée dans la détermination de la limite du **produit** de deux fonction parmi les fonctions puissance, exponentielle et logarithme, la limite est celle, dans l'ordre de celle de la fonction exponentielle, puis puissance, puis logarithme.
On écrit parfois pour se souvenir que :

« L'exponentielle l'emporte sur la puissance qui elle-même l'emporte sur le logarithme. »

- **Exemple 1 : calculer la limite en $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$**

  Si on calcule la limite , on trouve un quotient $\dfrac{\infty}{\infty}$, qui est une forme indéterminée.
  Mais pour lever l'indétermination, on se ramène à un produit.
  On écrit donc $f(x) = \dfrac{1}{x} \times e^x$.
  Alors :
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

  C'est une forme indéterminée, mais on peut utiliser le théorème de croissance comparée : la limite de la fonction exponentielle l'emporte :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$

- **Exemple 2 : Calculer la limite en $0+$ de $g(x) = x^2 \ln x$.**
  - $\lim\limits_{x \to 0+} x^2 = 0+$
  - $\lim\limits_{x \to 0+} \ln x = -\infty$

  C'est une forme indéterminée : La limite de la fonction puissance l'emporte :

$$\boxed{\lim_{x \to 0+} g(x) = 0}$$