Concours blanc n° 1

La durée de cette épreuve est de 4h. La calculatrice est rigoureusement interdite. Veuillez soigner votre présentation (notamment bien reporter le numéro des questions, et aérer la copie pour une lecture facile).

1 Exercice 1 : Matrices

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^2 = 4A - 4I$.
2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.
3. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = n2^{n-1}A - (n-1)2^n I$$

   (On rappelle que $A^0 = I$)
4. Cette formule est-elle encore valable pour $n = -1$?
5. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
   Calculer $P \times Q$. En déduire que P est inversible et donner son inverse .
6. Soit $L = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$
   (a) Ecrire l'égalité $LX = U$ sous la forme d'un système.
   (b) En « inversant le système », trouver l'expression de L^{-1}

2 Exercice 2 : Probabilités (ECRICOME 2017)

Partie I : tirages dans une urne

Une urne $\mathcal{U}$ contient 1 boule noire et 3 boules blanches indiscernables au toucher.

1. On procède à 400 tirages successifs avec remise d'une boule dans $\mathcal{U}$. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de fois où la boule noire a été piochée.
   (a) Quelle est la loi de X ?
   On précisera $X(\Omega)$ et $P(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.
   (b) Donner la valeur de l'espérance de X notée $E(X)$ et vérifier que la variance de X, notée $V(X)$ est égale à 75.

2. On procède cette fois-ci dans $\mathcal{U}$ à une suite de tirages avec remise d'une boule jusqu'à obtenir la boule noire. On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
   (a) Quelle est la loi de Y ?
   On précisera $Y(\Omega)$ et $P(Y = k)$ pour tout $k \in Y(\Omega)$.
   (b) Donner la valeur de $E(Y)$ et vérifier que $V(Y) = 12$.
3. Cette fois-ci, on pioche dans l'urne $\mathcal{U}$ successivement et sans remise les quatre boules. On note Z le numéro du tirage auquel est apparue la boule noire.
   (a) Donner la loi de Z sous forme d'un tableau.
   (b) Calculer $E(Z)$ et de $V(Z)$.
4. On suppose maintenant que l'urne $\mathcal{U}$contient 1 boule noire et 99 boules blanches.
   (a) Quelle est la probabilité p de tirer une boule noire ?
   (b) On procède à 400 tirages successifs avec remise d'une boule dans $\mathcal{U}$. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de fois où la boule noire a été piochée.
   On suppose que l'on peut approximer la loi de X par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 4$. En vous aidant de la table de loi de Poisson, calculer :
      i. La probabilité de piocher trois fois la boule noire.
      ii. La probabilité de piocher au moins 4 fois la boule noire.
   (c) Que valent $E(X)$ et $V(X)$?

	λ				
k	1	2	3	4	5
0	0,37	0,14	0,05	0,02	0,01
1	0,37	0,27	0,15	0,07	0,03
2	0,18	0,27	0,22	0,15	0,08
3	0,06	0,18	0,22	0,20	0,14
4	0,02	0,09	0,17	0,20	0,18
5	0,00	0,04	0,10	0,16	0,18
6	0,00	0,01	0,05	0,10	0,15
7	0,00	0,00	0,02	0,06	0,10
8	0,00	0,00	0,01	0,03	0,07
9	0,00	0,00	0,00	0,01	0,04
10	0,00	0,00	0,00	0,01	0,02

TABLE 1 – Table de loi de Poisson : $P(X = k)$ si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

Partie II : tirages dans une urne choisie au hasard

L'urne $\mathcal{U}$ contient toujours 1 boule noire et 3 boules blanches indiscernables au toucher. L'urne $\mathcal{V}$ contient 2 boules noires et 2 boules blanches indiscernables au toucher.

On lance une pièce équilibrée. Si elle retombe sur le côté Pile, on tire deux boules successivement et avec remise dans $\mathcal{U}$, et si on obtient Face, on tire deux boules successivement et avec remise dans $\mathcal{V}$.
On note T la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'on a pioché une boule noire.

5. Que vaut $T(\Omega)$?
6. Donner la loi de T. On vérifiera que $P(T=1)=\dfrac{7}{16}$.
7. Calculer $E(T)$.
8. Sachant que l'évènement $[T=1]$ est réalisé, est-il plus probable d'avoir obtenu Pile ou d'avoir obtenu Face avec la pièce ?

3 Exercice 3 : Etude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+xe^{-x+2}-1$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère donné. On rappelle que $e^0=1$ et que $e^1\simeq 2.7$

1. (a) Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$.
   (b) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (c) Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y=x-1$ est une asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$.
   (d) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)=1+(1-x)e^{-x+2}$ (Penser à **soigner** cette question).
   (e) Calculer $f''(x)$ et montrer que $f''(x)=(x-2)e^{-x+2}$.
   (f) Étudier le signe de $f''(x)$. En déduire que f admet un point d'inflexion que l'on précisera.
   (g) En déduire le tableau des variations de f', puis le signe de $f'(x)$.
   (h) En déduire le sens de variations de la fonction f.
2. (a) Montrer, en utilisant le tableau de variation de f et le théorème des valeurs intermédiaires, que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, que l'on note α.
   (b) Un programme Scilab a calculé α a retourné la valeur 0,135. Cette valeur vous semble t'elle cohérente ?
3. (a) Donner l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe de f au point d'abscisse 2.
   (b) Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de $\mathcal{D}$.
   (c) Représenter, sur le graphique situé en annexe, la courbe représentative de la fonction f ainsi que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{T}$. On fera apparaître α et on donne les valeurs suivantes : $f(0,6)\simeq 2$ $\quad f(3)\simeq 3,2$ $\quad f(4)\simeq 3,55$ $\quad f(5)\simeq 4,25$

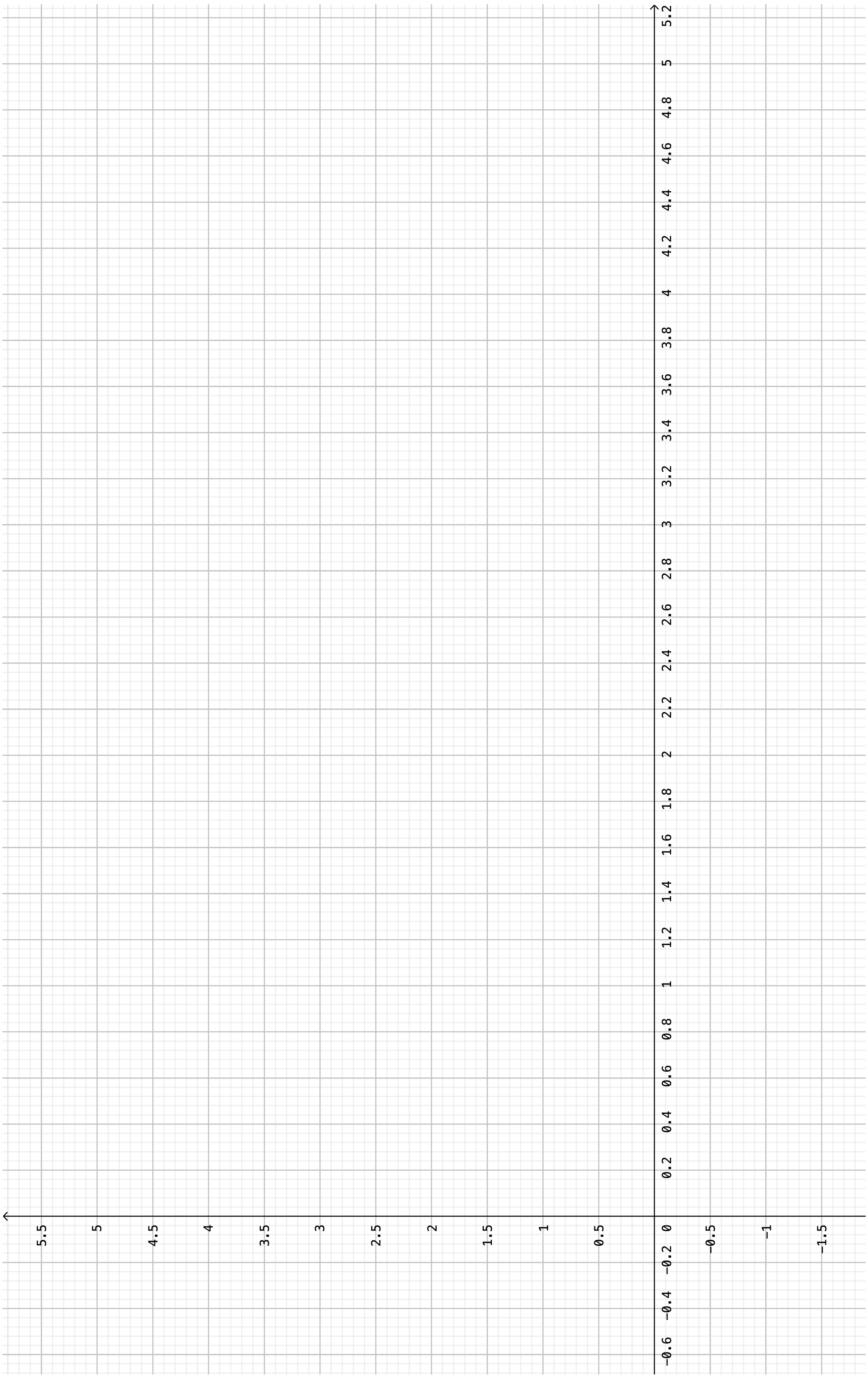

FIGURE 1 – A rendre avec la copie