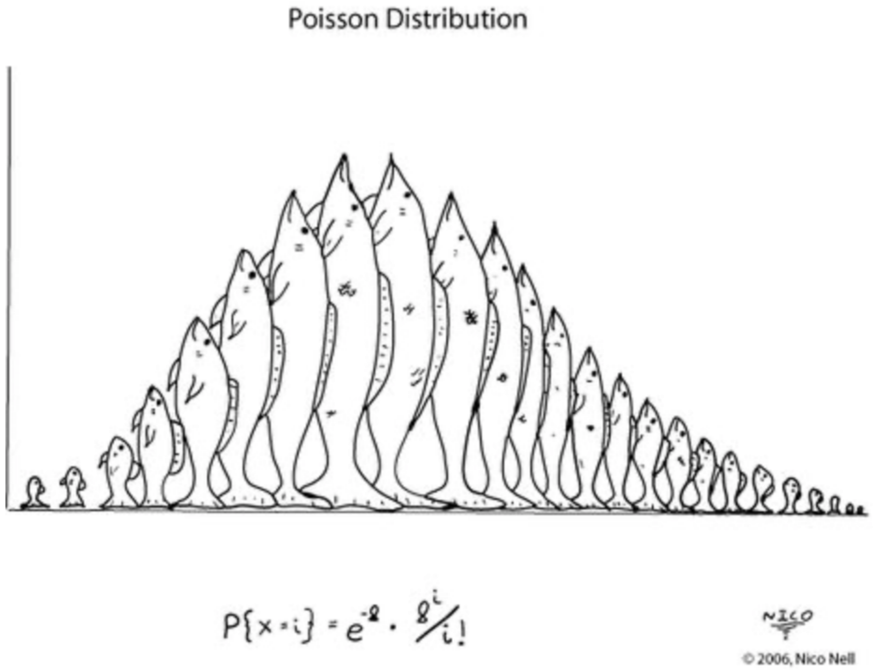
Probabilités 2 : Loi géométrique / loi de Poisson



If you aren't laughing now then you have passed an "Im'm not a nerd" test.

1 Loi géométrique

Introduction : Voir activité 1.

Loi Géométrique

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, lorsque $X : \Omega \to \mathbb{N}^*$ est telle que : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P([X=k]) = (1-p)^{k-1} \times p$.

Vérification :

On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{k-1} \times p = \frac{1}{1-(1-p)} \times p = \frac{1}{p} \times p = 1$, donc la somme des probabilités est bien égale à 1.

Situation de référence

On utilise une loi géométrique lorsque l'on s'intéresse **au rang du premier succès lors de la répétition d'une expérience de Bernoulli** de paramètre p. Si on note X ce rang, alors X suit est une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre p.

Espérance/Variance

Étant donnée une variable aléatoire X qui suit une loi géométrique de paramètre p,

— Son espérance est $E(X) = \dfrac{1}{p}$

— Sa variance est $V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$

2 Loi de Poisson

Introduction : Voir activité 2.

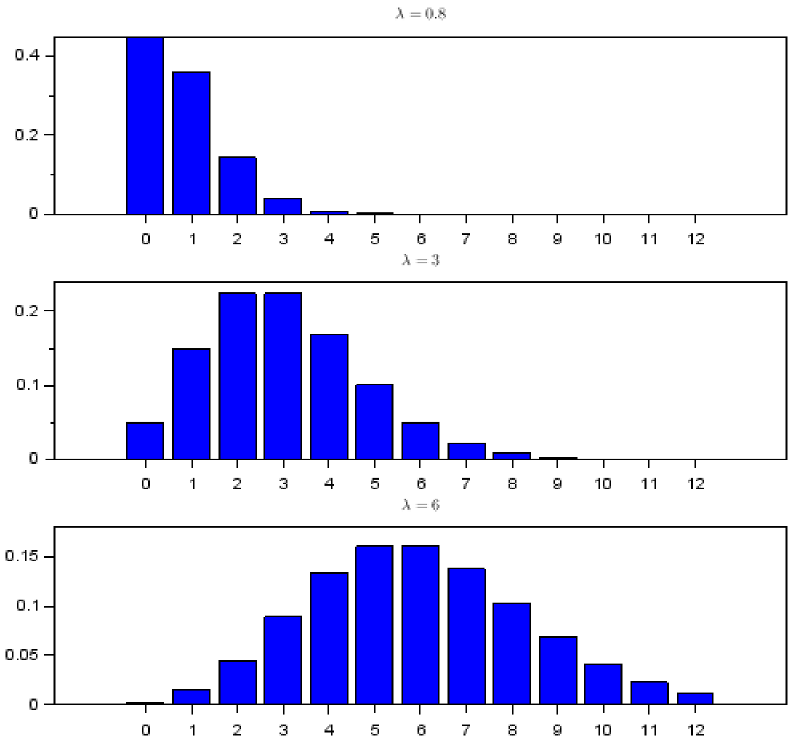
Loi de Poisson

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, lorsque $X : \Omega \mapsto \mathbb{N}$ est telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P([X = k]) = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.

Vérification.

On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{\lambda} \times e^{-\lambda} = e^0 = 1$, donc la somme des probabilités est bien égale à 1.

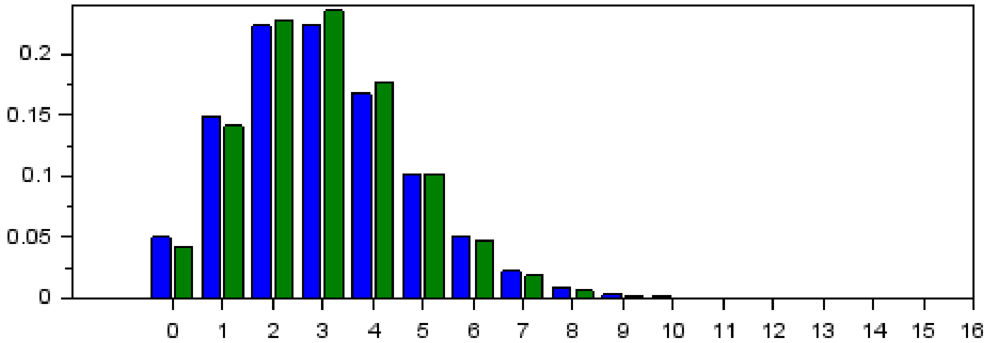
Ci-dessous la représentation graphique de la loi de Poisson pour trois valeurs différentes de λ :



Approximation de la loi binomiale

La loi de Poisson constitue aussi une bonne approximation de la loi binomiale de paramètres n et p, lorsque p est petit et n grand, et lorsque $\lambda = np$ est constant.

À titre d'exemple, le graphique ci-dessous affiche les deux lois pour $n = 30$ et $p = 0,1$, et donc $\lambda = 3$.



Espérance/Variance

Étant donnée une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre λ,

— Son espérance est $E(X) = \lambda$

— Sa variance est $V(X) = \lambda$

Situation de référence

La loi de Poisson est utilisée pour modéliser le nombre d'occurrences d'un évènement qui se reproduit de manière indépendante et dont on connaît le nombre moyen λ d'apparitions dans une plage de temps donnée. Elle est utilisée notamment en gestion des stocks, contrôle de qualité, défaut de crédit, anticipation des accidents et catastrophes, gestion des appels téléphoniques.

Exemple.

Un serveur téléphonique reçoit en moyenne 5 appels par heure qui durent en moyenne une minute. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'appels reçus en une heure. On peut diviser l'intervalle d'une heure en 60 minutes, alors X suit une loi binomiale de paramètres $n = 60$ et $p = \frac{5}{60}$. On est dans les conditions d'applications de la propriété d'approximation de la loi binomiale : n est grand, p est petit, et $\lambda = np = 5$ est constant. On considère donc que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 5$.

On peut alors calculer la probabilité de recevoir 7 appels dans une heure à venir :

$P([X = 7]) = \frac{5^7}{7!}e^{-7} \approx 0,014$, soit environ 1,4%.

3 Variables aléatoires discrètes infinies

Les variables aléatoires exposées ci-dessus, qu'elles suivent la loi géométrique ou de Poisson, présentent la nouveauté de pouvoir prendre un nombre infini de valeurs.

Par conséquent les univers sur lesquels elles sont définies sont eux aussi infinis.
Par exemple, lors de la répétition d'une épreuve de Bernoulli jusqu'au premier succès, l'univers est :
$\Omega = \{S, ES, EES, EEES, EEEES, EEEEES, \ldots\}$.

Dès lors, il n'est plus question d'appliquer la formule $\dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre total de cas}}$, qui soustendait jusqu'ici bien des calculs en probabilités.

Espace probabilisé

On appelle espace probabilisé la donnée des trois éléments suivants :

— un univers Ω ensemble de toutes les issues possibles ;

— un ensemble $\mathbb{B}$ de tous les évènements possibles ;

— une application $P : \mathbb{B} \to [0; 1]$ qui vérifie :

- $P(\Omega) = 1$;
- pour toute paire d'évènements disjoints A, B de $\mathbb{B}$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Sur un tel espace probabilisé, une variable aléatoire est une application $X : \mathbb{B} \to \mathbb{R}$.