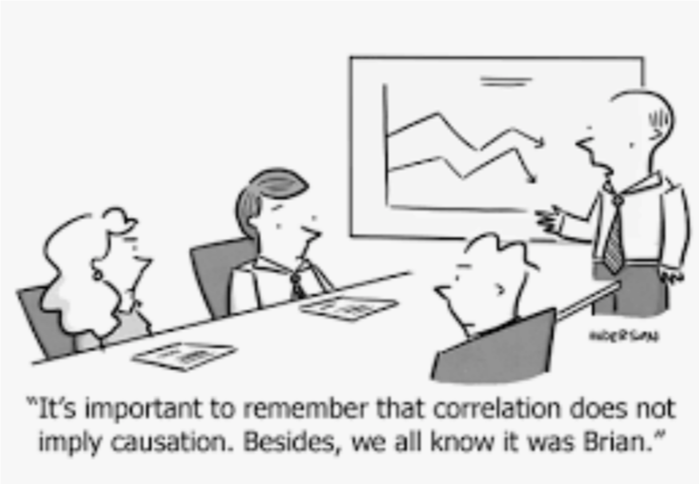
Probabilités : Variables aléatoires



1 Vocabulaire et notations

Pour illustrer les définitions, on s'appuie sur l'exemple du lancer de deux dés pour lequel on calcul la différence entre le plus grand et le plus petit. On s'appuiera sur le tableau :

Dé1/Dé2	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

Définition

Ω étant un univers fini associé à une expérience aléatoire, une *variable aléatoire* est une fonction, le plus souvent notée X, qui à une issue de Ω associe un nombre réel (donc dans $\mathbb{R}$).

Définition

Pour tout $k \in \mathbb{R}$, la notation $[X = k]$ désigne l'ensemble des issues qui ont pour image k par la fonction X.

Définition

Le support de X est l'ensemble des valeurs prises par X. On le note $X(\Omega)$

Définition

On appelle *loi de probabilité* de la variable aléatoire X la donnée de $P([X = x_i])$ pour chaque $x_i \in X(\Omega)$.

Définition

On appelle *espérance* de la variable aléatoire X le nombre $E(X) = \sum_i x_i P([X = x_i])$.

- **Univers** : $\Omega = [\![1, 6]\!] \times [\![1, 6]\!]$
- **Variable aléatoire** : X est la variable aléatoire qui , à un lancer, associe la différence entre les deux dés. Ainsi $X((1, 4)) = 3$ et $X((3, 2)) = 1$.
- **Évènements** : Par exemple, $[X = 2] = \{(1, 3), (3, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 6), (6, 4)\}$.
- **Le support** : Les différences sont des nombres allant de 0 à 5.
- **La loi de probabilité** de X peut se présenter ici sous la forme d'un tableau :

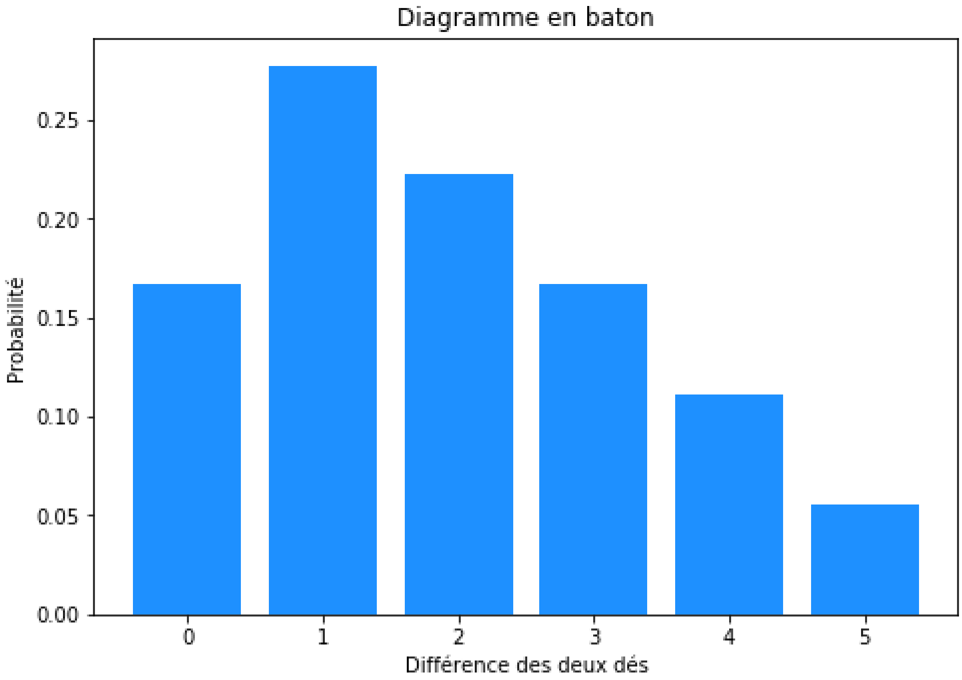
x_i	0	1	2	3	4	5
$P([X = x_i])$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

- **L'espérance de** X :

$$E(X) = 0 \times \frac{6}{36} + 1 \times \frac{10}{36} + 2 \times \frac{8}{36} + 3 \times \frac{6}{36} + 4 \times \frac{4}{36} + 5 \times \frac{2}{36} = \frac{70}{36} = \frac{35}{18}$$

Interprétation statistique : Si lance un très grand nombre de fois deux dés équilibrés et qu'on calcule leur différence, on peut s'attendre à ce que la différence entre les deux dés soit en moyenne égale à $\frac{35}{18} \approx 1,94$ au centième près.

- **Diagramme en baton :**



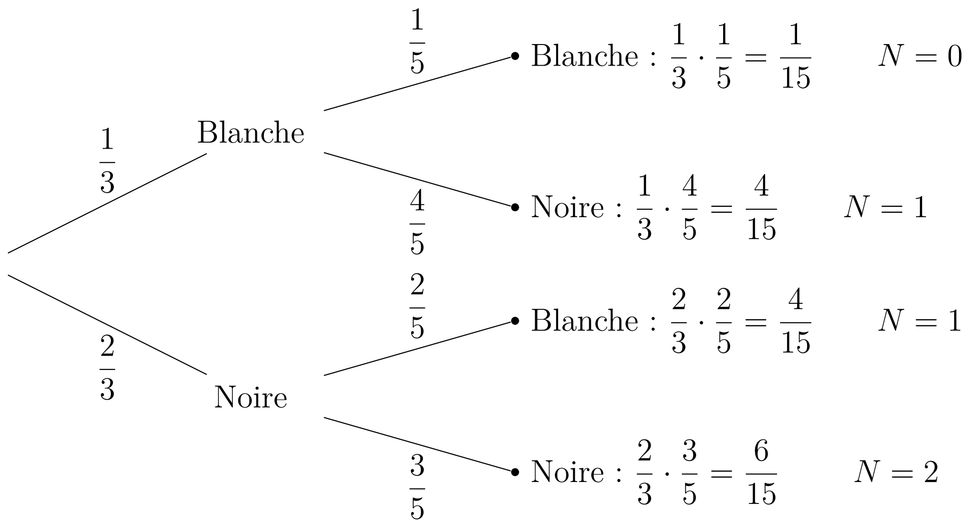
Point Python : nous verrons que ce type de diagramme s'obtient par la script suivant :

```
import matplotlib.pyplot as plt
fig = plt.figure()
ax = fig.add_axes([0,0,1,1])
difference = range(6)
proba = [6/36,10/36,8/36,6/36,4/36,2/36]
ax.bar(difference,proba,color='dodgerblue')
ax.set_xlabel('Différence des deux dés')
ax.set_ylabel('Probabilité')
ax.set_title('Diagramme en baton')
plt.show()
```

2e Exemple.

On tire au hasard deux boules simultanément dans une urne contenant 2 boules blanches et 4 boules noires indiscernables au toucher. On note N la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées.

Le mieux ici est de présenter sous la forme d'un arbre pondéré, en précisant au bout des branches la valeur prise par la variable aléatoire N.

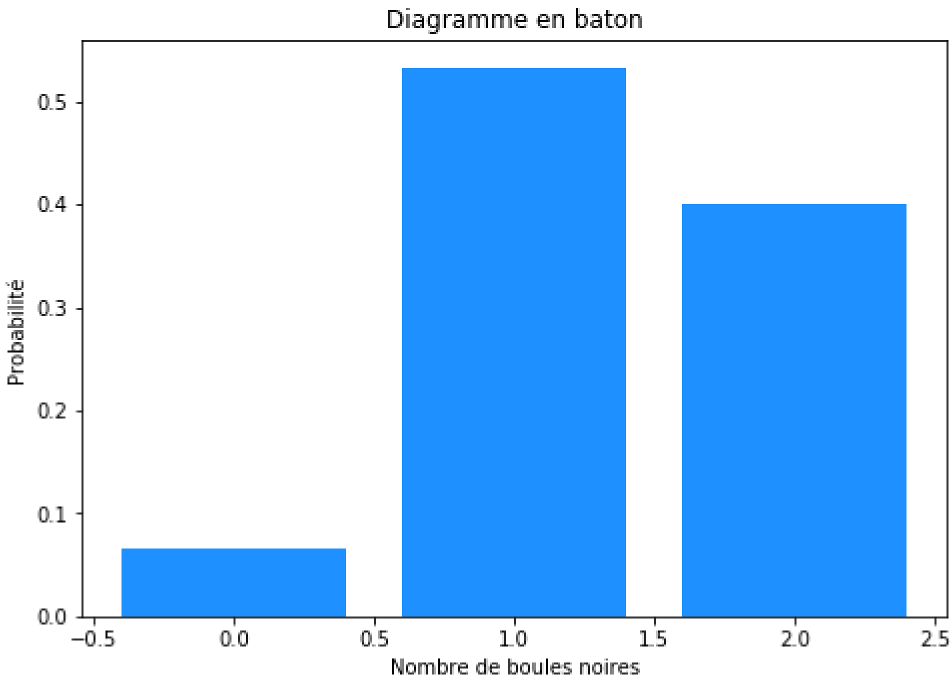


La loi de probabilité de N est :

n_i	0	1	2
$P([N = n_i])$	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{6}{15}$

L'espérance de N est $E(N) = 0 \times \frac{1}{15} + 1 \times \frac{8}{15} + 2 \times \frac{6}{15} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$.

On peut s'attendre à tirer en moyenne $\frac{4}{3}$ boule noire.



2 Fonction de répartition

Définition

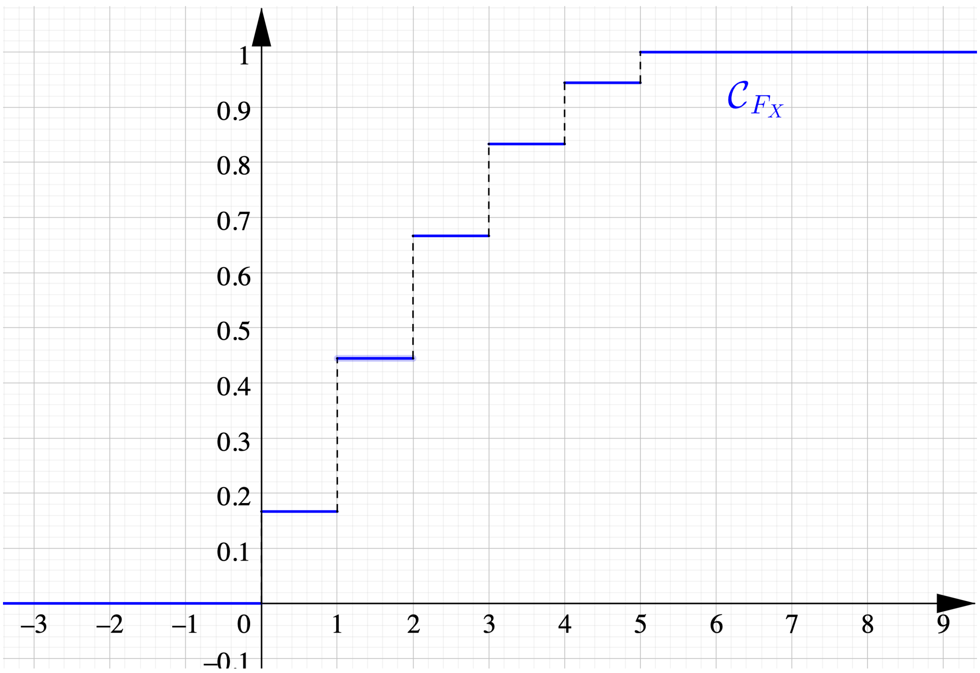
La fonction de répartition associée à une variable aléatoire X est la fonction notée F_X définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F_X(x) = P(X \leq x)$.

1^er Exemple.

Reprenons la variable aléatoire X ci-dessus. La probabilité qu'elle prenne une valeur strictement négative est nulle, donc pour tout $x < 0$, $F_X(x) = P([X \leq x]) = 0$.
La probabilité qu'elle prenne une valeur strictement inférieure à 1 est égale à $\frac{6}{36}$,
donc pour tout $x \in [0; 1[$, $F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{6}{36}$.
La probabilité qu'elle prenne une valeur strictement inférieure à 2 est égale à $\frac{6}{36} + \frac{10}{36}$,
donc pour tout $x \in [1; 2[$, $F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{16}{36}$.

De la même façon, $\begin{cases} \text{si } 3 \leq x < 4 & \text{alors } F_X(x) = \frac{24}{36} \\ \text{si } 4 \leq x < 5 & \text{alors } F_X(x) = \frac{30}{36} \\ \text{si } 5 \leq x & \text{alors } F_X(x) = 1 \end{cases}$

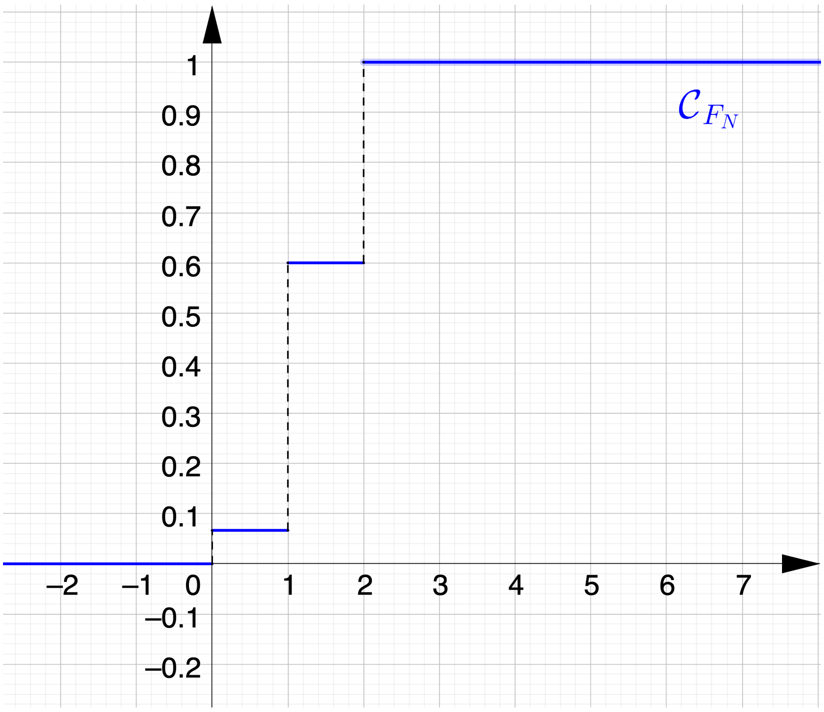
La courbe de la fonction de répartition F_X est la suivante :



2e Exemple.
La fonction de répartition de la variable aléatoire N du deuxième exemple est définie par :

$$\begin{cases} \text{Pour tout } x \in]-\infty; 0[, & F_N(x) = 0 \\ \text{Pour tout } x \in [0, 1[, & F_N(x) = \dfrac{1}{15} \\ \text{Pour tout } x \in [1; 2[, & F_N(x) = \dfrac{9}{15} \\ \text{Pour tout } x \in [2; +\infty[, & F_N(x) = 1 \end{cases}$$

La courbe représentative de la fonction F_N est la suivante :



3 Propriétés de l'espérance

Propriété de linéarité de l'espérance

Pour toute variable aléatoire X, et pour tout nombre réel a et b, $E(aX + b) = aE(X) + b$.

Exemple.
On lance un dé à six faces, et on note X la variable aléatoire égale au résultat du dé. On a déjà calculé en exercice que $E(X) = 3,5$. On propose le jeu suivant :
On mise 10 € et on gagne deux fois le résultat du dé.
Exprimer le gain G en fonction de X. Quelle est l'espérance du gain ? Le jeu est-il favorable ?

Réponse :

- Le gain G est égal à $G = 2X - 10$
- $E(G) = E(2X - 10) = 2E(X) - 10 = -3.$
- Le jeu n'est pas favorable car $E(G) < 0.$