Exercices : Matrices 3

1 Introduction

Exercice 1

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -5 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
2. Calculer $P^{-1}AP$. La matrice A est-elle diagonalisable ?

2 Valeurs propres/vecteurs propres

Exercice 2

Soit la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que les vecteurs $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de la matrice A et déterminer les valeurs propres associées .

Exercice 3

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et les vecteurs $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

1. Calculer AX_1, AX_2 et AX_3.
2. En déduire sans aucun calcul le produit $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

Exercice 4

Compléter les matrices :

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & -2 & 5 \\ -6 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a & 3b & c \\ a & 2b & -c \\ -a & b & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

3 Matrice diagonalisable

Exercice 5

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ -7 & -10 \end{pmatrix}$ et les vecteurs $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que X_1 et X_2 sont des vecteurs propres de A et déterminer les valeurs propres associées.
2. En déduire que A est diagonalisable.

Exercice 6

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -5 & -8 & -4 \\ 12 & 11 & 0 \\ -10 & -8 & 1 \end{pmatrix}$, et les vecteurs $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que X_1, X_2 et X_3 sont des vecteurs propres de A et déterminer les valeurs propres associées.
2. En déduire que A est diagonalisable.

4 Polynôme annulateur

Exercice 7

Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$.

Montrer que le polynôme $P(x) = x^2 - 2x - 3$ est un polynôme annulateur de A.

Exercice 8

Soit le polynôme $P(x) = x^3 + x$ et la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que P est un polynôme annulateur de A.

Exercice 9

Pour chacun des polynômes de degré 3 ci-dessous, trouver une racine évidente α , puis trouver une factorisation de la forme $(x-\alpha)(ax^2+bx+c)$ et trouver l'ensemble des racines :

(a) $P(x) = x^3 - x$

(b) $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

(c) $R(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

(d) $S(x) = 2x^3 + 5x^2 - 11x + 4$

Exercice 10

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -10 & 6 \\ -12 & 8 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^2 + 2A - 8I = 0$.
2. En déduire les éventuelles valeurs propres de A.

Exercice 11

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$.
2. En déduire les éventuelles valeurs propres de A.

Exercice 12

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, et les vecteurs $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ b \end{pmatrix}$.

1. Quelles sont les valeurs propres de la matrice A ?
2. Déterminer les valeurs de a, b et c pour que X_1, X_2 et X_3 soient des vecteurs propres de A.
3. La matrice A est-elle diagonalisable ?

5 Application aux calculs de puissances

Exercice 13

Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer un polynôme P annulateur de A.
2. Montrer que les racines de P sont des valeurs propres de A et déterminer un vecteur propre associé à chacune d'elles.
3. Diagonaliser la matrice A.

4. Donner l'expression des coefficients de A^n.

Exercice 14

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -3 \end{pmatrix}$ et soit $P(x) = x^3 - 7x + 6$.

1. Calculer A^2 et A^3, et montrer que $P(A) = 0$.
2. Déterminer les racines de P.
3. Montrer que chacune de ces racines est une valeur propre de A, et trouver un vecteur propre associé.
4. Montrer que A est diagonalisable.
5. Donner l'expression des coefficients de A^n.

Exercice 15

On considère la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer A^2 et $8\,\mathrm{A} - 15\mathrm{I}$ puis déterminer un polynôme annulateur de A. En déduire les valeurs propres possibles de A.

   (b) Vérifier que les valeurs trouvées à la question précédente sont effectivement valeurs propres de A et donner un vecteur propre pour chacune d'elles.
2. (a) Soit $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et donner son inverse.

   (b) Soit $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathrm{AP} = \mathrm{PD}$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $\mathrm{A}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$, puis donner l'expression de A^n en fonction de n pour tout entier n
4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $u_0 = 1, v_0 = 1$ et pour tout entier naturel n :
$$\begin{cases} u_{n+1} = 7u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = -4u_n + v_n \end{cases}$$

   (a) On note $\mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Exprimer X_{n+1} en fonction de A et X_n.

   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a$\mathrm{X}_n = \mathrm{A}^n\mathrm{X}_0$, puis donner l'expression de u_n et v_n en fonction de n