Diagonalisation : résumé

1 Matrice diagonalisable

1.1 Définition

Définition.

Une matrice carrée A est dite diagonalisable si il existe une matrice D, diagonale, et une matrice P, inversible, telles que $D = P^{-1}AP$.
Remarque :

$$\boxed{D = P^{-1}AP \iff PD = AP \iff A = PDP^{-1}}$$

1.2 Valeur propre et vecteur propre

Définition.

Étant donnée une matrice carrée A, si il existe un nombre réel λ et une matrice colonne X non nulle tels que $AX = \lambda X$, alors λ est appelé valeur propre de A et X est appelé vecteur propre de A.

Dans la pratique, les vecteurs propres seront souvent donnés. Voici comment en déduire la matrice P :

Propriété.

Soit A une matrice carrée d'ordre 3 qui possède trois valeurs propres distinctes λ_1, λ_2 et λ_3, associées aux trois vecteurs propres X_1, X_2 et X_3. Alors la matrice P la matrice $(X_1|X_2|X_3)$ formée par les vecteurs (X_1, X_2, X_3) en colonne est inversible.

Théorème fondamental.

Soit A une matrice carrée d'ordre 3 qui possède trois valeurs propres distinctes λ_1, λ_2 et λ_3, associées aux trois vecteurs propres X_1, X_2 et X_3. Soit P la matrice $(X_1|X_2|X_3)$.

Alors $AP = PD$, où D est la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ et donc A est diagonalisable dès lors que P est inversible.

2 Polynôme annulateur d'une matrice

Si P est un polynôme, et A une matrice carrée, on peut donner un sens à l'expression $P(A)$ comme matrice carrée de même dimensions que A.

Exemple.

Soit le polynôme $P(x) = x^2 + 3x + 2$ et la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Alors $P(A) = A^2 + 3A + 2I = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$.

Définition

Étant donnée une matrice carrée A, P est un polynôme annulateur de A si $P(A) = 0$ (matrice nulle).

La connaissance d'un polynôme annulateur est liée à la recherche des valeurs propres par le théorème suivant :

Théorème (admis)

Si P est un polynôme annulateur de A, toute valeur propre de A est une racine de P.

Remarque. La réciproque est fausse : les racines d'un polynôme annulateur de A ne sont pas forcément toutes des valeurs propres de A.

3 Cas des matrices triangulaires

Théorème.

Si A est une matrice triangulaire, ses valeurs propres sont les coefficients situés sur sa diagonale.
Si ces coefficients sont deux à deux distincts, alors A est diagonalisable.