Lycée Grand Nouméa
ECT Bis
A. DA SILVA

Sujet de révision

Année 2021

Pendant le confinement : Faire ce sujet en essayant de faire le maximum. En cas de blocage avéré, m'envoyer un message sur le groupe Messenger, avec une photo du point où vous bloquez et avec votre question. Je posterai un corrigé d'ici le 19 mars.

Exercice 1

On note dans cet exercice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer la matrice $N = A - I$, puis calculer N^2 et N^3.
   (b) En déduire un polynôme annulateur de la matrice A.
   (c) En déduire les valeurs possibles des valeurs propres de la matrice A.
   (d) La matrice A est-elle diagonalisable ? Justifier.
2. Montrer en exploitant l'égalité $A = N + I$, et grâce à la formule du binôme, que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :
$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   Cette formule est-elle encore valable lorsque $n = 0$? lorsque $n = 1$?
3. (a) Par la méthode du pivot, justifier que la matrice A est inversible et calculer son inverse.
   (b) La formule de la question 2/ est-elle encore valable lorsque $n = -1$?

On essaie maintenant de déterminer les expressions des suites (x_n), (y_n) et (z_n) définies par :
$$x_0 = 1, \quad y_0 = 1, \quad z_0 = 1 \text{ et pour tout entier naturel } n : \begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \\ y_{n+1} = y_n + z_n \\ z_{n+1} = z_n \end{cases}$$

4. (a) De quel type est la suite (z_n) ? En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de z_n.
   (b) En déduire alors le type de la suite (y_n) puis donner, pour tout entier naturel n, l'expression de y_n en fonction de n.
5. Pour tout entier naturel n, on pose : $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ n+1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Préciser X_0 et montrer que $X_{n+1} = AX_n$.
   (b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $X^n = A^n X_0$.
   (c) En déduire l'expression de x_n en fonction de n.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n(1-u_n) \end{cases}$

La fonction f est définie sur $[0;1]$ par $f(t) = t(1-t)$.

1. (a) Établir le tableau des variations de f.

   (b) Montrer que pour tout entier n, $u_n \in [0; \frac{1}{2}]$.

   (c) Montrer que la suite (u_n) est monotone et convergente. On note l sa limite.

   (d) Justifier que (u_{n+1}) converge à la fois vers l et vers $l(1-l)$.
   En déduire $l = 0$.

2. On définit pour tout entier naturel non nul n : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k^2$.

   (a) Pour tout entier naturel k, exprimer $u_k - u_{k+1}$ en fonction de u_k.

   (b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n : $S_n = \dfrac{1}{2} - u_n$.

   (c) On note pour tout entier naturel k : $p_k = 2u_k^2$.
   Montrer que la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une loi de probabilité.

Exercice 3

On dispose d'un dé cubique classique équilibré et d'une pièce équilibrée.
On lance le dé et on observe son résultat :
Si celui-ci est un 6, on lance la pièce deux fois.
Dans tous les autres cas, on lance la pièce une seule fois.
On note X la variable aléatoire égale au résultat du dé.
On note Y la variable aléatoire égale au nombre de PILES apparus au cours de cette expérience.

1. (a) Écrire une fonction scilab intitulée `de()` qui retourne la valeur 1 si le résultat du dé est 6 et 0 sinon.

   (b) Écrire une fonction scilab intitulée `piece()` qui retourne 1 si le lancer de la pièce est PILE et 0 sinon.

   (c) Compléter le programme scilab ci-dessous pour qu'il retourne la valeur de Y suite à une réalisation de l'expérience :

```
Y=0
if de()= ...then Y= ...
else Y= piece()
end
disp(...)
```

2. (a) Justifier que X suit une loi uniforme que l'on précisera en détail.
   (b) Donner l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.
3. Montrer que $P(Y=2) = P([Y=2] \cap [X=6]) = \frac{1}{24}$.
4. (a) Montrer que pour $k \in \{1,2,3,4,5\}$, $P_{[X=k]}(Y=0) = \frac{1}{2}$.
   (b) Que vaut $P_{[X=6]}(Y=0)$?
   En déduire en utilisant la formule des probabilités totales que $P(Y=0) = \frac{11}{24}$.
   (c) Donner finalement la loi de la variable Y et calculer son espérance.
5. (a) Recopier et compléter les cases du tableau suivant afin qu'il fournisse la loi du couple (X,Y) (aucune justification supplémentaire n'est demandée).

X \ Y	1	2	3	4	5	6
0						
1						
2						

   (b) Calculer alors la covariance de X et de Y.

Exercice 4

Soit f la fonction réelle définie par :

$$\begin{cases} f(t) = 0 \text{ si } t \leq 0 \text{ ou } t > 2 \\ f(t) = \frac{1}{2}t \text{ si } t \in]0;2] \end{cases}$$

1. (a) Montrer que f est continue en 0. Montrer que f est une densité de probabilité.
   (b) On note désormais X une variable de densité f, et on note F sa fonction de répartition. Rappeler l'intégrale permettant de calculer $F(x)$ en fonction de la densité f. Calculer $F(x)$ en séparant les cas $x \leq 0$, $0 < x \leq 2$, et $x > 2$.
   (c) Calculer la probabilité $P(X \leq 1)$ et la probabilité $P(\frac{1}{2} < X \leq 1)$.
   (d) Justifier que $X(\Omega) =]0;2]$.
2. Déterminer l'espérance de X.

Soit U la variable aléatoire définie par $U = X^2$ et G sa fonction de répartition.

3. Déterminer $U(\Omega)$ puis justifier que si $x \leq 0$, $G(x) = 0$ et si $x > 4$, $G(x) = 1$.
4. (a) Justifier l'égalité des évènements $[U \leq 2]$ et $[-\sqrt{2} \leq X \leq \sqrt{2}]$, puis en déduire $G(2)$.
   (b) Plus généralement, montrer que si $0 < x \leq 4$, $G(x) = \frac{1}{4}x$.
   (c) Dresser un bilan pour la fonction G puis reconnaître la loi de U.
   (d) En déduire l'espérance $E(U)$ puis la valeur de la variance de X.