Lycée Grand Nouméa
ECT bis
A. DA SILVA

ESCP (2009) - Exercice 1

Année 2021

A renvoyer par mail pour le 15 mars : alban.da-silva@ac-noumea.nc› (avec l'objet "ESCP_2009")

On considère la fonction f définie, pour tout réel x de $[0, +\infty[$, par la relation

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$$

1. (a) On note f' la dérivée de f. Calculer, pour tout réel x positif, $f'(x)$.
   (b) Étudier, suivant les valeurs de x, le signe de $f'(x)$.
   (c) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
   (d) Dresser le tableau de variation de f.
2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et la relation : pour tout n de $\mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$
   (a) Calculer u_1 et u_2.
   (b) Montrer par récurrence que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $0 < u_n \leqslant \frac{1}{n}$
   (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
3. On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$.
   (a) Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de u_n.
   (b) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, l'encadrement suivant :
   $$2 \leqslant v_n \leqslant 2 + \frac{1}{n}$$
4. Montrer par récurrence que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :
   $$2(n+1) \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant 2(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$
5. (a) Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, comparer $\frac{1}{k}$ et $\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}dt$
   (b) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'inégalité suivante :
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n)$$
6. Utiliser les questions précédentes pour montrer que : $\lim_{n\to+\infty} nu_n = \frac{1}{2}$