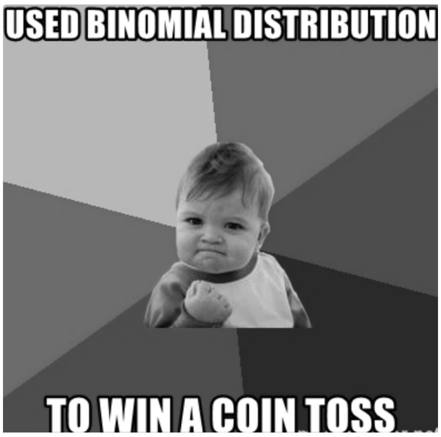
Loi uniforme et binomiale



Dans ce chapitre, nous étudions des lois de probabilité particulières que nous sommes amenés à rencontrer fréquemment en mathématiques.

1 Loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$

Définition.

Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ si pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $P(X = k) = \dfrac{1}{n}$
On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$.

Espérance :	$E(X) = \dfrac{n+1}{2}$.
Variance :	$V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$

Démonstration :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} k \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Donc

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{2(2n^2+3n+1)}{12} - \left(\frac{3(n^2+2n+1)}{12}\right)^2 \\ &= \frac{n^2-1}{12} \end{aligned}$$

2 Loi de Bernoulli

Définition

Une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0;1]$ si X prend deux valeurs, 0 et 1, cette dernière avec la probabilité p. On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Espérance :	$E(X) = p$
Variance :	$V(X) = p(1-p)$

Exemple :

On tire une boule dans une urne contenant 3 boules rouges et 5 boules vertes. On note X la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée est rouge et à zéro sinon. X suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{3}{8}$.

3 Loi binomiale

Définition

Une variable aléatoire suit une loi binomiale de paramètres p et n si elle prend pour valeurs les entiers de 1 à n et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Espérance :	$E(X) = np$
Variance :	$V(X) = np(1-p)$

Épreuve de Bernoulli et loi binomiale

Nous rencontrerons principalement la loi binomiale dans la situation où l'on répète de manière indépendante une épreuve de Bernoulli.

Épreuve de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui n'a que deux issues : le succès et l'échec. On note p la probabilité du succès et donc nécessairement la probabilité de l'échec est $1 - p$.

Issue	Échec	Succès
Probabilité	$1-p$	p

Exemples :

1. On lance un dé et on considère que le succès est d'obtenir 6 : $p = \frac{1}{6}$.
2. On lance une pièce et on considère que le succès est d'obtenir pile : $p = \frac{1}{2} = 0,5$.

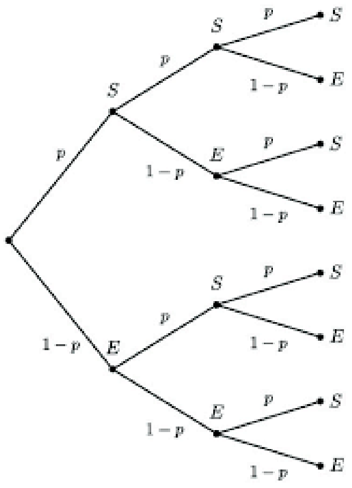
Variable aléatoire de Bernoulli

Sur l'univers Ω={succès, échec}, on peut définir une variable aléatoire X prenant la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec. Cette variable aléatoire suit une loi de Bernoulli. Elle a pour espérance p et pour variance $p(1-p)$.

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$1-p$	p

Schéma de Bernoulli

On appelle schéma de Bernoulli de paramètres n et p toute expérience aléatoire consistant à répéter n fois de façon indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre p. Ce schéma peut être représenté par un arbre (ici dans le cas $n = 3$) :



Issue	Probabilité	Nombre de succès (k)

Loi binomiale

Si X est le nombre de succès obtenus lors de la répétition indépendante de n épreuves de Bernoulli identiques, alors la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

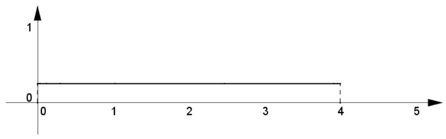
En effet, une répétition ordonnée qui donne lieu à k succès a une probabilité égale à $p^k(1-p)^{n-k}$. Pour compter le nombre de répétitions ordonnées qui donnent lieu à k succès, il faut choisir les k positions des succès, ce qui donne $\binom{n}{k}$ possibilités.

Ainsi $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

4 Loi uniforme sur un intervalle continu

Lorsqu'on choisit un nombre au hasard dans un intervalle, par exemple $[0;4]$, la probabilité d'obtenir un nombre en particulier est nulle : $P(X=1)=0$. En revanche, on détermine facilement la probabilité d'obtenir un résultat entre 0 et 1 : $P(0 \leq X \leq 1) = \frac{1}{4}$.

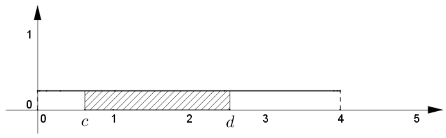
Une telle variable aléatoire est dite continue, et on peut lui associer une fonction de densité. Dans cet exemple, la fonction de densité f est constante égale à $\frac{1}{4}$.



On calcule alors la probabilité que X appartienne à un intervalle $[c;d]$ au moyen d'une intégrale :

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x)dx$$

.



Cas général.

Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a;b])$, si X a pour densité de probabilité la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a;b] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

Pour tous nombres c et d tels que $a \leq c \leq d \leq b$, $P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x)dx = \frac{d-c}{b-a}$.