DS – 29/11/2021 – 4h

1 EXERCICE 1

On considère les matrices suivantes :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Montrer que la matrice P est inversible et déterminer son inverse.
   (b) Vérifier que le polynôme $X^2 - 2X$ est un polynôme annulateur de la matrice A. En déduire les valeurs propres possibles de A.
   (c) Montrer que $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A. Á quelles valeurs propres sont-ils associés ?
   (d) Justifier l'égalité $P^{-1}AP = C$
2. (a) Exprimer B en fonction de I_2 et A. Exprimer de même D en fonction de I_2 et C.
   (b) En déduire que $P^{-1}BP = D$.
3. (a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $P^{-1}B^nP = D^n$
   (b) Pour tout entier naturel n, donner les coefficients de D^n.
   (c) Déduire de $3.a$) et $3.b$) que pour tout entier naturel n on a : $B^n = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n-1 \\ 3^n-1 & 3^n+1 \end{pmatrix}$
4. Antoine et Béatrice jouent au Badminton. On suppose que lors de chaque échange, le joueur qui a le service emporte le point avec une probabilité $\dfrac{2}{3}$ et le perd avec une probabilité $\dfrac{1}{3}$. On suppose que c'est Antoine qui a le service lors du premier échange. Ensuite, selon les règles de ce jeu, celui qui emporte l'échange marque un point et obtient le service pour l'échange suivant.
   Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note A_n l'événement « Antoine gagne le n ième échange »et B_n l'événement « Béatrice gagne le $n^{\text{ième}}$ échange ». On note a_n et b_n leurs probabilités respectives.
   (a) Donner les valeurs de a_1 et b_1. Calculer a_2 et vérifier que $a_2 = \dfrac{5}{9}$.
   (b) On observe qu'Antoine emporte le deuxième échange. Quelle est la probabilité qu'il ait emporte le premier échange ?
   (c) Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que pour tout entier $n \geq 1$ on a :
   $a_{n+1} = \dfrac{2}{3}a_n + \dfrac{1}{3}b_n$. Exprimer de même b_{n+1} en fonction de a_n et b_n pour tout entier $n \geq 1$.

(d) Pour tout entier $n \geq n$, on note X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

Vérifier que $X_{n+1} = \dfrac{1}{3} B X_n$

(e) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $X_n = \dfrac{1}{3^{n-1}} B^{n-1} X_1$

(f) Déduire de 3.c) que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $a_n = \dfrac{3^n + 1}{2 \times 3^n}$.
Déterminer de même une expression de b_n en fonction de n pour tout entier $n \geq 1$.

5. **Simulation informatique.**
On rappelle que l'instruction a=**grand** $(1, 1,'$ **bin'** $, 1, p)$ simule une loi de Bernoulli de paramètre p.
Ainsi si $p = \dfrac{2}{3}$ l'instruction **a=grand** $(1, 1,$ **' bin'** $, 1, 2/3)$ affecte à la variable **a** la valeur 0 avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$ et la valeur 1 avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$.
On utilise cette instruction pour simuler une partie de 20 échanges entre Antoine et Béatrice.

(a) Recopier et compléter les lignes 4 et 5 du programme ci-dessous de telle sorte que lors de chacun des 20 échanges de la partie la variable **a** corresponde au point marqué par Antoine lors de cet échange (c'est-à-dire 1 ou 0).

(b) Recopier et compléter les lignes 2 et 7 afin que la variable S calcule la somme des points obtenus par Antoine durant la partie.

```
a=grand(1,1,'bin',1,2/3)
S=....
for i=2:20
      if  a==1 then a=grand(.........)
              else a=grand(.........)
      end
      S=....
end
disp(S)
```

2 EXERCICE 3

Une entreprise fabrique à la chaîne des cartouches d'imprimante. Chaque cartouche a une probabilité p d'être défectueuse.
En bout de chaîne une machine détecte à coup sûr les cartouches défectueuses et les retire de la chaîne.

Modèle 1

On suppose que l'on connait la valeur de la probabilité p et qu'elle est égale à $\frac{2}{100}$.

L'entreprise fabrique en une heure 100 cartouches dont les défauts éventuels sont indépendants les uns des autres.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de cartouches défectueuses détectées en bout de chaine durant cette période.

1. Reconnaître la loi de X. On donnera l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X ainsi que l'expression de $P(X = k)$ pour tout entier k appartenant à $X(\Omega)$.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.

La machine affiche chaque heure le nombre de cartouches défectueuses mais l'afficheur ne peut plus afficher la valeur 0 . En revanche il affiche normalement tous les autres nombres y compris $10, 20$, etc. Lorsque X est égale à 0, il affiche au hasard n'importe quel nombre parmi les autres valeurs possibles de X. Soit Y la variable aléatoire égale à la valeur affichée.

3. On rappelle que l'instruction $\text{grand}(1, 1,'bin', n, p)$ simule une loi binomiale de paramètres (n, p) et que l'instruction $\text{grand}(1, 1,'uin', 1, n)$ simule une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Recopier et compléter le programme suivant afin qu'il simule l'expérience ci-dessus et qu'il affiche les valeurs respectives de X et de Y.

```
X=grand(1,1, ...)
if x=0  then Y= ...
             else Y=...
end
disp(x); disp (Y)
```

Deuxième modèle

Dans cette question, la valeur de p est inconnue et on cherche à l'estimer.

Pour cela on fait tester par la machine 1000 cartouches ($n \geq 1$). Pour tout i compris entre 1 et n, on note X_i la variable aléatoire de Bernoulli égale à 1 si la $i^{\text{ième}}$ cartouche est défectueuse et égale à 0 sinon. On suppose que les variables aléatoires X_i sont indépendantes.

On note $T = \dfrac{1}{1000} \displaystyle\sum_{i=1}^{1000} X_i$

4. Rappeler, pour i compris entre 1 et 1000, l'espérance et la variance de X_i.
5. Calculer $E(T)$. En déduire que T est un estimateur sans biais de p.
6. Calculer $V(T)$. Montrer que le risque quadratique de l'estimateur T est égal à $\dfrac{p(1-p)}{n}$.
7. Etudier la fonction f définie par $f(x) = x(1-x)$ pour $x \in [0,1]$. On calculera la dérivée et on fera le tableau de variation. En déduire que $p(1-p) \leq \dfrac{1}{4}$ pour tout $p \in [0,1]$
8. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer, en appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que :
$$P(|T-p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4000\varepsilon^2}$$
9. En prenant $\varepsilon = 0.1$, montrer alors $[T-0.1; T+0.1]$ est un intervalle de confiance pour p au niveau de confiance 0.975.

3 EXERCICE 4

Pour tout entier $n \geq 1$ on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\, dt$

1. a) Vérifier que pour tout réel t appartenant a $[0;1]$ on a : $\dfrac{t}{1+t} = 1 - \dfrac{1}{1+t}$.
b) En déduire que $I_1 = 1 - \ln(2)$.
c) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $I_{n+1} + I_n = \dfrac{1}{n+1}$.
d) En déduire la valeur de I_2 puis celle de I_3.

Soit k un réel strictement positif. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(t) = k\frac{t}{1+t} \quad \text{si t } \in [0;1] \text{ et } f(t) = 0 \text{ sinon}$$

2.) En utilisant l'un des calculs de la question 1. déterminer la valeur qu'il faut donner à k pour que f puisse être une densité de probabilité. Vérifier que pour cette valeur de k la fonction f est bien une densité de probabilité.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que k est la valeur trouve à la question 2. et que X est une variable aléatoire ayant f pour densité. On note F sa fonction de répartition.

3.) a) Calculer $F(x)$ lorsque $x < 0$ et lorsque $x > 1$.
b) Montrer que pour tout réel $x \in [0;1]$ on a : $F(x) = k(x - \ln(1+x))$.
4.) a) En utilisant l'un des calculs de la question 1 justifier que X admet une espérance et que
$$E(X) = \frac{\ln(2) - \frac{1}{2}}{1 - \ln(2)}$$
(b) En utilisant l'un des calculs de la question 1 justifier que X admet une variance et calculer $V(X)$. On ne demande pas de simplifier l'expression de $V(X)$.