Outils pour l'étude d'une fonction

1 Fonction dérivée et variations

Dérivées des fonctions usuelles (à compléter)

Fonction	Ensemble de définition	Dérivée
$f(x) = a$ (constante)	$\mathbb{R}$	0
$f(x) = x^n$	$\mathbb{R}$	$f'(x) =$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) =$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) =$
$f(x) = \ln(x)$	$]0; +\infty[$	$f'(x) =$
$f(x) = \sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$f'(x) =$

Opérations sur les dérivées

Opération	Fonction	Dérivée
Somme	$f + g$	$f' + g'$
Multiplication par un nombre	$k \times f$	$k \times f'$
Multiplication	$u \times v$	$u \times v' + u' \times v$
Division	$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$
Composition avec puissance	u^n	$n \times u' \times u^{n-1}$
Composition avec exponentielle	e^u	$u'e^u$
Composition avec logarithme	$\ln(u)$	$\dfrac{u'}{u}$

Équation de la tangente

Si f est une fonction définie et dérivable au voisinage du nombre a,
alors la tangente à la courbe de f au point de coordonnées $(a; f(a))$ est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

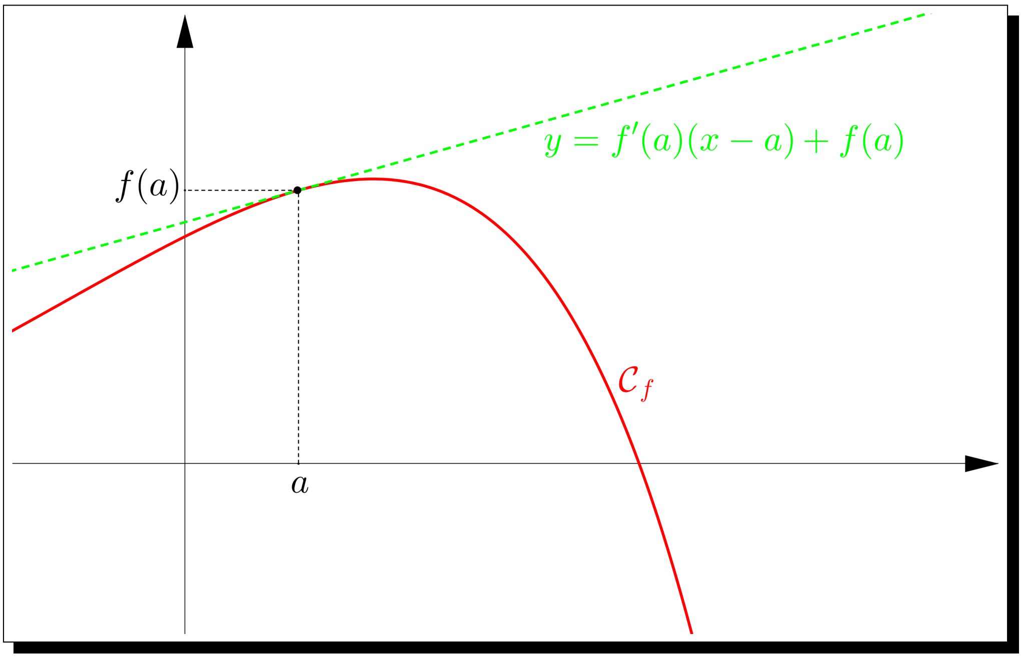


FIGURE 1 – Tangente en $x = a$

2 Calcul de limites

Fonctions de référence

Fonction puissance (n entier naturel non nul) :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ si n est pair et $-\infty$ si n est impair.

Fonction exponentielle :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

Fonction logarithme népérien :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$

Allures des courbes : au cahier

Opérations sur les limites

Limite d'une somme :

Limite de f	Limite de g	Limite de $f+g$
a	b	$a+b$
a	$-\infty$	$-\infty$
a	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

Limite d'un produit :

Limite de f	Limite de g	Limite de $f \times g$
a	b	$a \times b$
$a \neq 0$	∞	∞
0	∞	F.I.
∞	∞	∞

Limite de l'inverse d'une fonction :

Limite de f	Limite de $\frac{1}{f}$
$a \neq 0$	$\frac{1}{a}$
0^+	$+\infty$
0^-	$-\infty$
∞	0

Croissances comparées

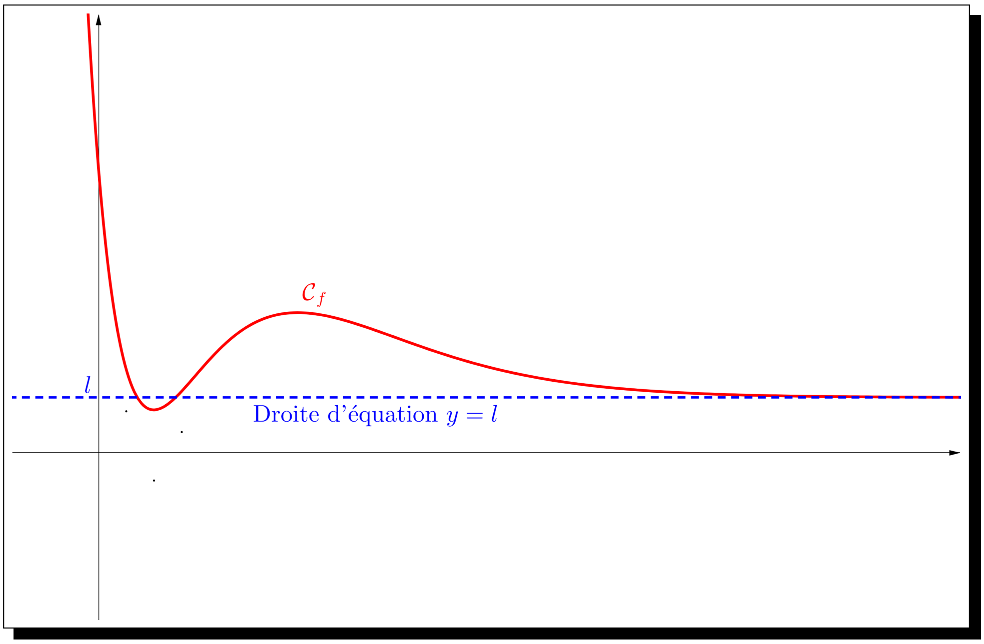
Lorsque le produit ou le quotient de deux fonctions parmi puissance, logarithme népérien et exponentielle, a une limite indéterminée en 0 ou en l'infini, c'est, dans l'ordre, l'exponentielle, la puissance puis le logarithme qui impose sa limite.
En particulier, pour tout nombre n strictement positif,
$\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0$, $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

3 Asymptotes

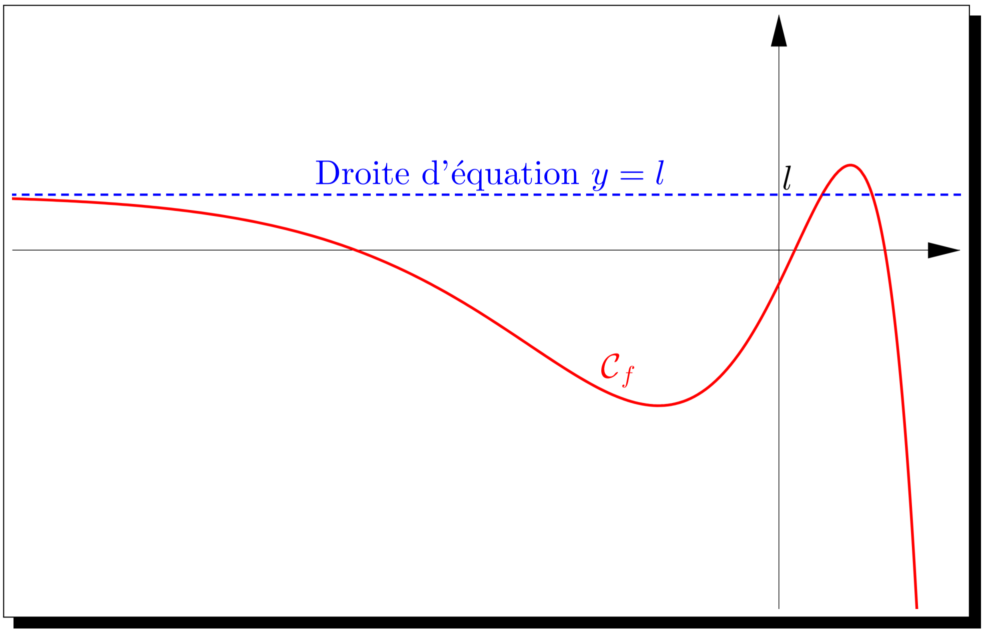
Asymptote horizontale en $+\infty$ et $-\infty$

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$.
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$, alors la courbe de f admet une une asymptote horizontale d'équation $y = l$ en $+\infty$. Soit f une fonction définie au voisinage de $-\infty$.

Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$, alors la courbe de f admet une une asymptote horizontale d'équation $y = l$ en $-\infty$.



(a) Asymptote horizontale en $+\infty$



(b) Asymptote horizontale en $-\infty$

Asymptotes verticales

Soit $f$une fonction définie au voisinage d'un nombre a donné.
Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$, alors la courbe de f admet une une asymptote verticale d'équation $x = a$.

Asymptotes obliques

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$.
S'il existe deux nombres a et b tels que $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$.

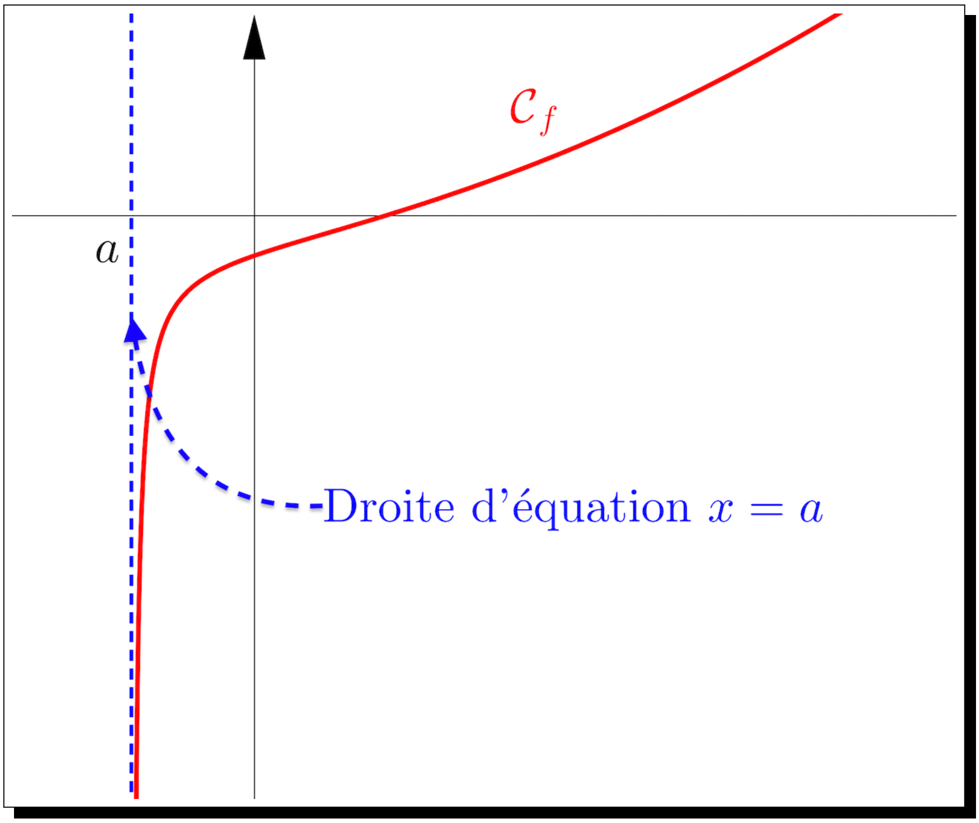


FIGURE 2 – Asymptote verticale

Méthode pour trouver une asymptote oblique

1. On cherche la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ en $+\infty$. Si elle est finie, on la prend comme valeur du coefficient a.
2. On cherche la limite de $(f(x) - ax)$ en $+\infty$.
   (a) Si cette limite est infinie,
   la droite d'équation $y = ax$ est une direction asymptotique de la courbe de f en $+\infty$.
   (b) Si cette limite est finie,
   égale à b, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$.

On peut reprendre tout ce paragraphe en remplaçant $+\infty$ par $-\infty$.

4 Convexité

Convexité

Une fonction f est dite **convexe** sur un intervalle I si elle est définie et dérivable deux fois sur I et si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.

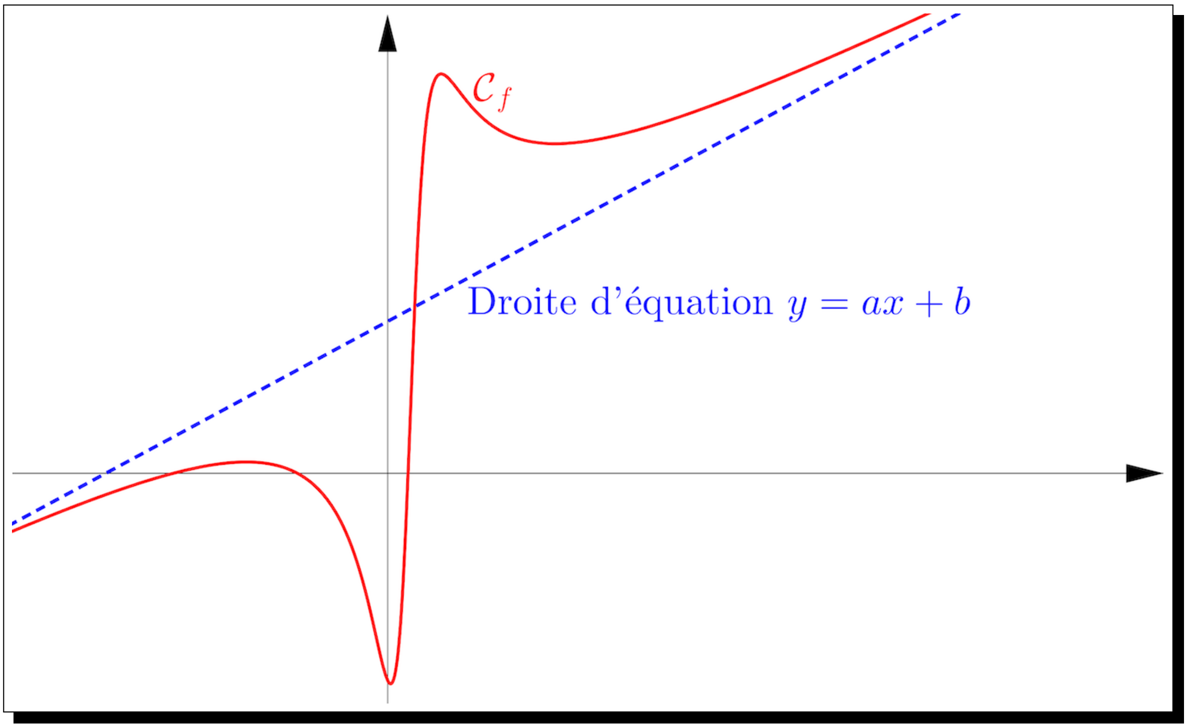


FIGURE 3 – Asymptote oblique en $+\infty$ (et aussi en $-\infty$)

Concavité

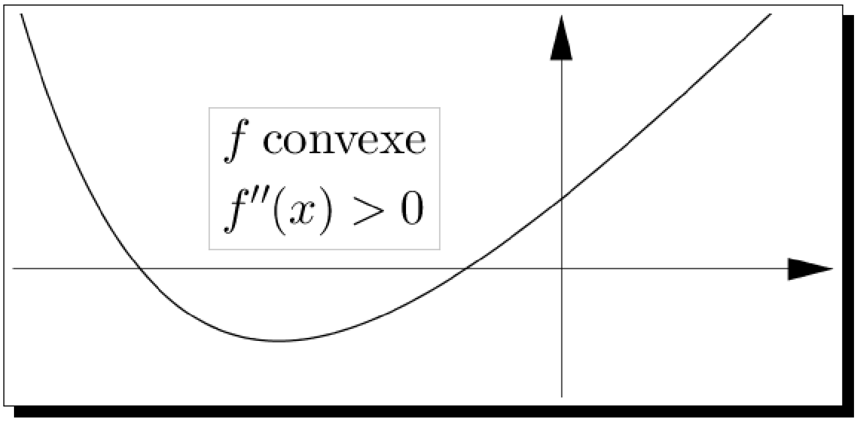
Une fonction f est dite **concave** sur un intervalle I si elle est définie et dérivable deux fois sur I et si $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$.

La courbe d'une fonction convexe est tournée vers le haut, et se situe au-dessous de ses cordes et au-dessus de ses tangentes.

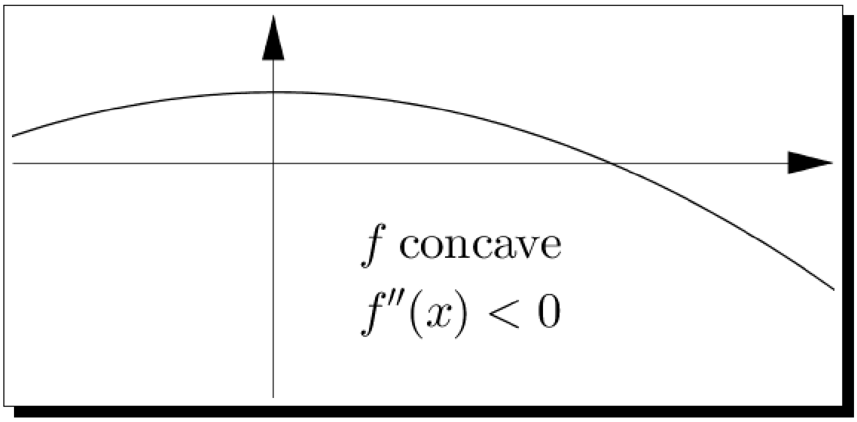
La courbe d'une fonction concave est tournée vers le bas, et se situe au-dessus de ses cordes et au-dessous de ses tangentes.

Point d'inflexion

Soit f une fonction deux fois dérivable au voisinage d'un nombre réel a. On dit que a est un **point d'inflexion** de f si la courbe de f change de concavité en a, c'est-à-dire si $f''(a)$ s'annule et change de signe en a.



(a) Convexe



(b) Concave

Figure 4

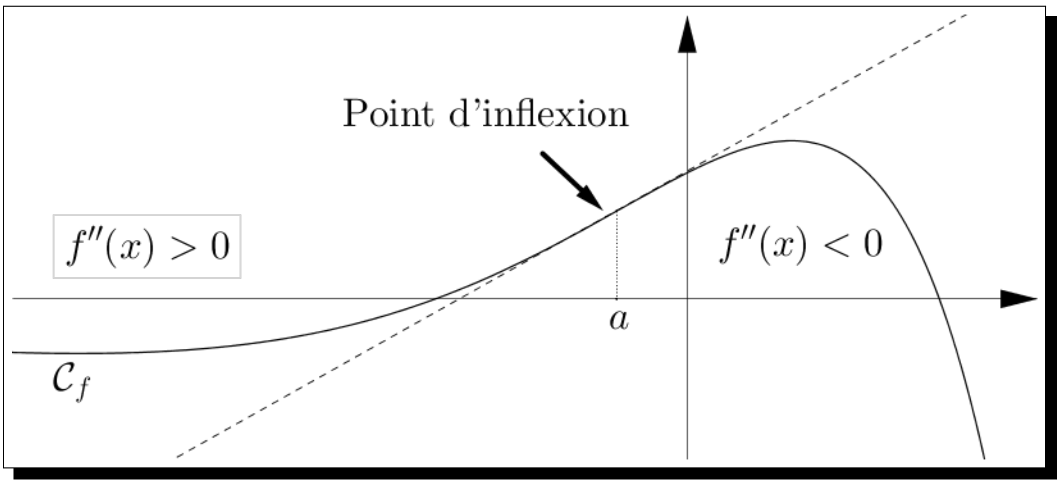


Figure 5 – Point d'inflexion