Matrices en probabilité

1 Exemple de problème

Imaginons qu'une puce de déplace sur un triangle équilatéral A, B, C . Elle est au départ sur le sommet A et à chaque seconde n elle change de place pour atteindre un autre sommet avec certaine probabilité :

- Si elle est en A, elle y reste ;
- Si elle est en B, elle peut y rester avec la probabilité $\dfrac{2}{5}$ ou sauter en A avec la probabilité $\dfrac{3}{5}$
- Si elle est en C, elle peut soit rester en A avec la probabilité $\dfrac{1}{5}$, soit rester en B avec la probabilité $\dfrac{1}{5}$, soit rester en C avec la probabilité $\dfrac{3}{5}$.

On peut représenter cette situation par un graphe probabiliste :

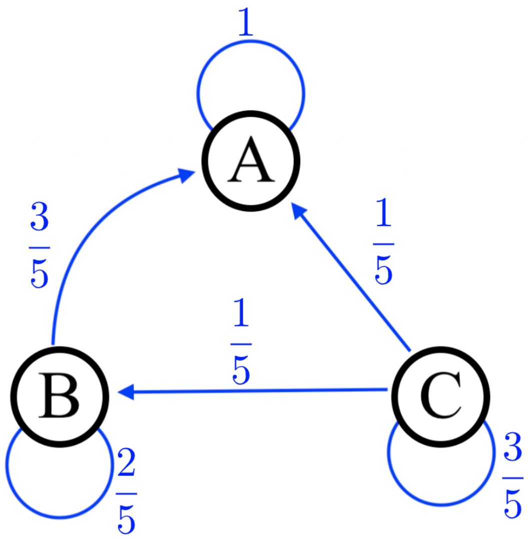

Figure 1 –

Peut on prévoir l'évolution du sytème ?
C'est à dire peut on prévoir les probabilités que la puce se retrouve en A, B ou C sur le très long terme ?
On pressent que la puce va se retrouver, à plus ou moins long terme, coincée en A, mais au bout de combien de temps et avec quelle probabilité ?

2 Rappels utiles

Rappel : Partition

On dit que n évènements A_1, A_2 et A_3,.... A_k forment une partition de l'univers Ω si :

- Ils sont incompatibles deux à deux , c'est à dire $A_i \cap A_j = \emptyset$;
- Leur union donne l'univers : $A_1 \cup A_2 .... \cup A_k = \Omega$

Rappel : Formule des probabilités totales

Si A_1, A_2 et A_3,.... A_k forment une partition de l'univers Ω alors pour tout évènement E,

$$P(E) = P(A_1) \times P_{A_1}(E) + P(A_2) \times P_{A_2}(E) + P(A_3) \times P_{A_3}(E) + ... + P(A_k) \times P_{A_k}(E)$$

En général, dans les sujets de concours on se sert de cette formule pour trois évènements (plus rarement pour deux). On identifie donc dans le texte trois évènements A, B, C **qui forment une partition de l'univers.**. On a alors pour tout évènement E :

$$\boxed{P(E) = P(A) \times P_A(E) + P(B) \times P_B(E) + P(C) \times P_C(E)}$$

Il est très fréquent que ces évènements dépendent d'un compteur n qui est généralement le nombre de fois où l'on répète une certaine action (un lancer de dé, un tir de fléchette...).

On montre cette dépendance en les notant A_n, B_n et C_n. La formule devient alors :

Formule pour trois évènements dépendant de n

$$\boxed{P(E) = P(A_n) \times P_{A_n}(E) + P(B_n) \times P_{B_n}(E) + P(C_n) \times P_{C_n}(E)}$$

Ensuite, le texte fait (en général) appliquer cette formule successivement pour trois cas : $E = A_{n+1}$, $E = B_{n+1}$, $E = C_{n+1}$, qui sont les trois évènements précédents pris à l'étape suivante.

On obtient alors un système de trois relations :

$$\begin{cases} P(A_{n+1}) & = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(A_{n+1}) \\ P(B_{n+1}) & = P(A_n) \times P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(B_{n+1}) \\ P(C_{n+1}) & = P(A_n) \times P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(C_{n+1}) \end{cases} \quad (1)$$

- Le plus souvent, le texte introduit des notations qui rendent cette écriture plus commode. Par exemple $u_n = P(A_n)$, $v_n = P(B_n)$ et $w_n = P(C_n)$.
- Les probabilités conditionnelles sont quand à elles des données de l'énoncé, qu'il faut généralement bien identifier. Ici pour simplifier l'écriture on posera :

- $P_{A_n}(A_{n+1}) = a$
- $P_{B_n}(A_{n+1}) = b$
- $P_{C_n}(A_{n+1}) = c$
- $P_{A_n}(B_{n+1}) = d$
- $P_{B_n}(B_{n+1}) = e$
- $P_{C_n}(B_{n+1}) = f$
- $P_{A_n}(C_{n+1}) = g$
- $P_{B_n}(C_{n+1}) = h$
- $P_{C_n}(C_{n+1}) = i$

La relation (1) a alors des allures plus simple :

$$\begin{cases} u_{n+1} = a.u_n + b.v_n + c.w_n \\ v_{n+1} = d.u_n + e.v_n + f.w_n \\ w_{n+1} = g.u_n + h.v_n + i.w_n \end{cases}$$

On peut transformer ce système en une relation matricielle, comme on l'a fait dans la partie « systèmes linéaires ». Le texte pose généralement des notations du type :

$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ où $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ sont des nombres donnés dans le texte (et dans l'intervalle $[0, 1]$ puisque correspondant à des probabilités). C'est la matrice de transition.

On obtient alors une relation (de récurrence) :

$$\boxed{X_{n+1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = AX_n}$$

On démontre alors que $\boxed{X_n = A^n X_0}$, ce qui permet de calculer X_n en fonction de n.

3 Retour au problème initial

Les rappels de la partie II incitent à poser $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

Cette matrice est, sous un nom ou un autre, généralement donnée dans l'énoncé.

De plus les évènements A_n (resp. B_n, resp. C_n) sont « La puce est en A (resp.B, C) à l'étape n »et a_n, b_n, c_n sont les probabilités associées.

On a d'après les données $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Le texte nous amènerait à calculer A^n, ou du moins sa troisième colonne uniquement. En effet si $A^n = \begin{pmatrix} \star & \star & {\color{red}\bullet} \\ \star & \star & {\color{blue}\bullet} \\ \star & \star & {\color{green}\bullet} \end{pmatrix}$ alors on constate que

$$A^n X_0 = \begin{pmatrix} \star & \star & {\color{red}\bullet} \\ \star & \star & {\color{blue}\bullet} \\ \star & \star & {\color{green}\bullet} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {\color{red}\bullet} \\ {\color{blue}\bullet} \\ {\color{green}\bullet} \end{pmatrix}$$

Il est donc inutile de calculer les deux premières colonnes dans ce cas.
On trouverait ici :

$$A^n = \begin{pmatrix} \star & \star & \left(\frac{2}{5}\right)^n - 2\left(\frac{3}{5}\right)^n + 1 \\ \star & \star & -\left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^n \\ \star & \star & \left(\frac{3}{5}\right)^n \end{pmatrix}$$

Or on a vu que $A^n X_0 = X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

donc on obtient :

$$\boxed{a_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n - 2\left(\frac{3}{5}\right)^n + 1} \quad \boxed{b_n = -\left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^n} \quad \boxed{c_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n}$$

Remarque : il n'est pas dénué d'intérêt de vérifier au passage que l'on a bien

$$a_n + b_n + c_n = 1$$

Réponse à la question initiale

On constate ce qui était attendu :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \quad \lim_{n\to\infty} c_n = 0$$

On peut alors chercher l'instant à partir duquel on est sûr au moins à 95% que la puce est en A :

```
for n in range(10):
    print("Pour n="+str(n)+" la probabilité que la puce soit en A \\
     est de "+str(1+(2/5)**n-2*(3/5)**n))

> Pour n=0 la probabilité que la puce soit en A est de 0.0
Pour n=1 la probabilité que la puce soit en A est de 0.19999999999999996
Pour n=2 la probabilité que la puce soit en A est de 0.44000000000000017
Pour n=3 la probabilité que la puce soit en A est de 0.6320000000000001
Pour n=4 la probabilité que la puce soit en A est de 0.7664000000000001
Pour n=5 la probabilité que la puce soit en A est de 0.85472
Pour n=6 la probabilité que la puce soit en A est de 0.9107840000000001
Pour n=7 la probabilité que la puce soit en A est de 0.9456512
Pour n=8 la probabilité que la puce soit en A est de 0.9670630400000001
Pour n=9 la probabilité que la puce soit en A est de 0.980106752
```

$\boxed{\text{Au huitième saut, la puce sera en } A \text{ avec une probabilité de } 0.96}$