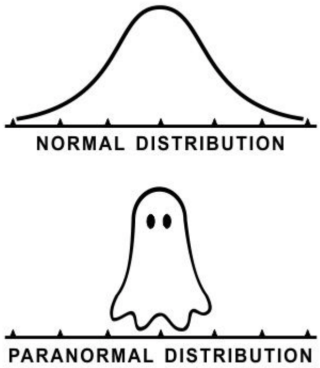
Probabilités 3 : lois à densité



1 Introduction

Lors des chapitres précédents nous avons rencontré, des v.a dont les valeurs prises forment un ensemble **discret**. Par exemple une loi de Poisson prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$. Dans ce cas $P(X \leq x)$ s'écrit sous la forme d'une somme. Par exemple pour calculer $P(X \leq 10)$ on emploie la formule $P(X \leq 10) = \sum_{k=0}^{10} P(X = k)$. Que se passe t'il maintenant si X peut prendre tout un segment de valeurs réelles ? Il faudrait pouvoir sommer continument, et donc utiliser une intégration.

Prenons par exemple l'expérience suivante : on lance une pierre sur un terrain plat de façon aléatoire et on mesure la distance en cm du lancer, avec un précision infinie. X peut prendre théoriquement toutes les valeurs réelles positives, sans doute bornées par les possibilités humaines. On peut commencer par pressentir que $P(X = x) = 0$ mais que l'on peut sans doute évaluer plutôt des probabilités du type $P(a \leq X \leq b)$. C'est l'objet de ce chapitre. La formule donnant $P(X \leq 10)$ sera donnée par **une intégrale** et non une somme.

2 Définitions

Fonction de densité

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une densité de probabilité si elle est positive, continue par morceaux avec un nombre fini de points de discontinuité et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$.

Variable aléatoire à densité

Une variable aléatoire X admet une densité si sa fonction de répartition F_X peut s'écrire sous la forme $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ où f est une densité de probabilité.
F_X est ainsi la primitive de f qui tend vers 0 en $-\infty$.

3 Espérance et variance

Définition de l'espérance.

On dit qu'une variable aléatoire X de densité f a une espérance lorsque l'intégrale ci-dessous converge.
Dans ce cas, on note :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Définition de la variance

On dit qu'une variable aléatoire X de densité f a une variance lorsque l'intégrale ci-dessous converge.
Dans ce cas, on note :

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx$$

L'écart-type est donné par $\sigma = \sqrt{V(X)}$.

Propriété.

Comme pour les variables aléatoires discrètes, on a $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$, avec :

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$$

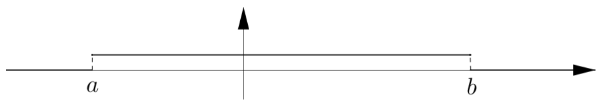
4 Trois lois usuelles

4.1 La loi uniforme

Définition.

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a; b]$, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}[a; b]$,

si X a pour densité la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{b-a} \text{ si } x \in [a; b] \\ f(x) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$



Propriété.

Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}[a; b]$, alors $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ et $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Démonstration.

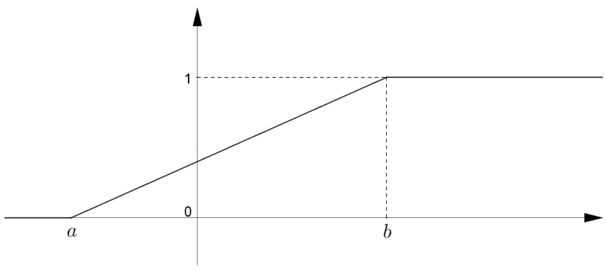
$E(X) = \int_a^b x \times \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \times \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) = \frac{1}{b-a} \times \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$.

$E(X^2) = \int_a^b x^2 \times \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \times \left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{1}{b-a} \times \frac{b^3-a^3}{3} = \frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3(b-a)}$
$= \frac{b^2+ab+a^2}{3}$

Donc $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$
$= \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{4b^2+4ab+4a^2}{12} - \frac{3b^2+6ab+3a^2}{12} = \frac{b^2-2ab+b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$.

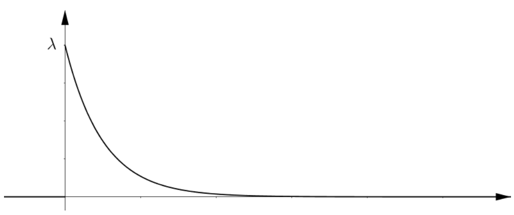
Fonction de répartition

La fonction de répartition d'une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{U}[a;b]$ est définie par $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} \text{ si } a \leq x \leq b \\ 1 \text{ si } x > b \end{cases}$



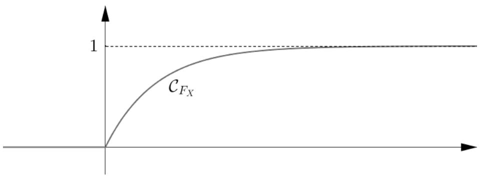
4.2 La loi exponentielle

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, si X a pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$



La fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est définie par :

$$\begin{cases} \text{si } x < 0,\ F_X(x) = 0 \\ \text{si } x \geq 0,\ F_X(x) = \displaystyle\int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x} \end{cases}$$



Espérance

Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Démonstration :
On veut montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x \times \lambda e^{-\lambda x} dx$ converge et vaut $\dfrac{1}{\lambda}$.

On réalise une intégration par parties, avec : $\begin{array}{ll} u' = \lambda e^{-\lambda x} & u = -e^{-\lambda x} \\ v = x & v' = 1 \end{array}$

d'où $\displaystyle\int_0^A x \times \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[x \times (-e^{-\lambda x})\right]_0^A + \int_0^A e^{-\lambda x} dx = -Ae^{-\lambda A} + \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^A = -Ae^{-\lambda A} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda A} + \frac{1}{\lambda}$.

Lorsque A tend vers $+\infty$, cette expression tend vers $\dfrac{1}{\lambda}$, donc l'intégrale converge et vaut $\dfrac{1}{\lambda}$.

Variance.

Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

Démonstration :
On commence par montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 \times \lambda e^{-\lambda x} dx$ converge pour trouver $E(X^2)$.

On réalise une intégration par parties, avec : $\begin{array}{ll} u' = \lambda e^{-\lambda x} & u = -e^{-\lambda x} \\ v = x^2 & v' = 2x \end{array}$

d'où $\displaystyle\int_0^A x^2 \times \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[x^2 \times (-e^{-\lambda x})\right]_0^A + \int_0^A 2x e^{-\lambda x} dx = A^2 \times (-e^{-\lambda A}) + \frac{2}{\lambda} \int_0^A x \lambda e^{-\lambda x} dx$

Quand A tend vers $+\infty$, le terme $A^2 e^{-\lambda A}$ tend vers 0 et l'intégrale $\displaystyle\int_0^A x \lambda e^{-\lambda x} dx$ tend vers $E(X)$.

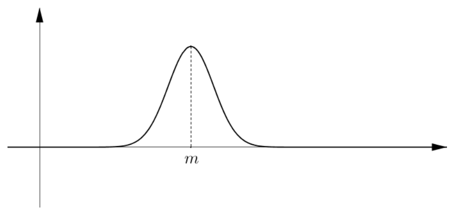
Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 \times \lambda e^{-\lambda x} dx$ converge et vaut $\dfrac{2}{\lambda} E(X) = \dfrac{2}{\lambda^2}$.

Finalement, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dfrac{2}{\lambda^2} - \left(\dfrac{1}{\lambda}\right)^2 = \dfrac{1}{\lambda^2}$

4.3 La loi normale

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance m et de variance σ^2, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, si X a pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$ dont la courbe représentative est :

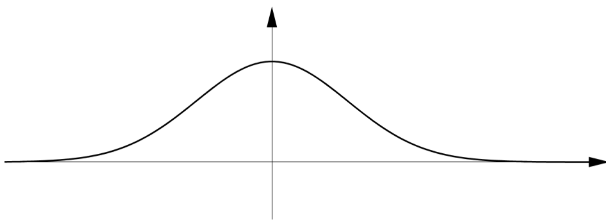


Propriété.

Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors $X^* = \dfrac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.
On dit alors que X^* suit une loi normale *centrée réduite*.

X^* a pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ dont la courbe représentative est :



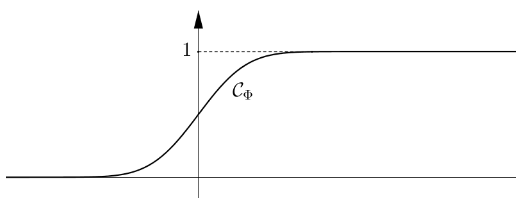
Démonstration. On admet que X^* suit bien une loi normale. Mais on peut vérifier que :

$$E(X^*) = E\left(\frac{X-m}{\sigma}\right) = \frac{E(X)-m}{\sigma} = 0$$

$$V(X^*) = V\left(\frac{X-m}{\sigma}\right) = V\left(\frac{X}{\sigma}\right) = \frac{V(X)}{\sigma^2} = 1.$$

La fonction de répartition Φ d'une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite est définie par :

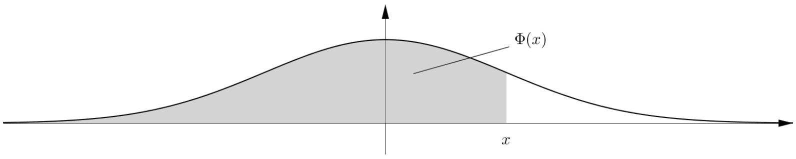
$\Phi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$, dont la courbe représentative est :



Propriété.

Pour tout nombre réel x, $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$.

Tableau des valeurs prises par la fonction Φ



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Exemple :

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(5,2)$. Calculons $P(2 \leq X \leq 6,5)$.

1. On se ramène à la loi centrée réduite :

$$P(2 \leq X \leq 6,5) = P(\frac{2-5}{2} \leq X^* \leq \frac{6,5-5}{2}) = P(-1,5 \leq X^* \leq 0,75).$$

2. On ramène le calcul à des nombres figurant dans le tableau :
$P(-1,5 \leq X^* \leq 0,75) = P(X^* \leq 0,75) - P(X^* < -1,5) = \Phi(0,75) - \Phi(-1,5)$.
Or $\Phi(-1,5) = 1 - \Phi(1,5)$.

3. La lecture du tableau donne : $\Phi(1,5) \approx 0,9332$, donc $\Phi(-1,5) \approx 0,0668$, et $\Phi(0,75) \approx 0,7734$.
Donc $P(2 \leq X \leq 6,5) \approx 0,7734 - 0,0668 = 0,7066$.