1 Application du cours

Soit un système comportant 3 états possibles A, B, C . A l'état initial (étape 0), le système est à l'état C

- Si le système est en A il peut rester en A avec la probabilité 0.1, il peut passer en B avec la probabilité 0.7, il peut passer en C avec la probabilité 0.2 ;
- Si le système est en B, il peut y rester avec la probabilité avec la probabilité 0.4, il peut passer en A avec la probabilité 0.4 ou en C avec la probabilité 0.2 ;
- Si le système est en C il ne peut y rester. Il peut passer en A ou en B de façon équiprobable.

On considère, pour tout entier naturel n non nul, les évènements :

- A_n : « être en A à l'étape n »
- B_n : « être en B à l'étape n »
- C_n : « être en C à l'étape n »

et on note $a_n = P(A_n), b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste.
2. Que valent a_0, b_0, c_0 ?
3. À l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$\begin{cases} a_{n+1} = 0.1a_n + 0.4b_n + \quad 0.5c_n \\ b_{n+1} = 0.7a_n + 0.4b_n + \quad 0.5c_n \\ c_{n+1} = 0.2a_n + 0.2b_n \end{cases}$$
4. Ecrire ce système sous forme matricielle
$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$
où vous préciserez la matrice M.
5. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$.
6. On donne (sans avoir besoin de le justifier) que la troisième colonne de M^n est donnée par :
$$\begin{bmatrix} \dfrac{5\left(-\frac{1}{5}\right)^n}{6} - \dfrac{15\left(-\frac{3}{10}\right)^n}{13} + \dfrac{25}{78} \\ -\dfrac{5\left(-\frac{1}{5}\right)^n}{3} + \dfrac{15\left(-\frac{3}{10}\right)^n}{13} + \dfrac{20}{39} \\ \dfrac{5\left(-\frac{1}{5}\right)^n}{6} + \dfrac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Exprimer alors a_n, b_n, c_n en fonction de n et donner :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n, \quad \lim_{n\to+\infty} b_n, \quad \lim_{n\to+\infty} c_n$$

2 Problème 1 : Extrait ECRICOME

Partie A : Calcul matriciel

On considère les trois matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = QMQ$$

1. Calculer $Q \times Q$.
2. Calculer D. On vérifiera que D est une matrice diagonale. Justifier que $M = QDQ$.
3. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = QD^nQ$.
4. Expliciter les neuf coefficients de la matrice M^n.

Partie B : Étude d'une expérience

On dispose de deux pièces de monnaie équilibrées, c'est-à-dire que la probabilité d'obtenir PILE en lançant l'une des deux pièces vaut $\frac{1}{2}$. On effectue des lancers selon le protocole suivant :

— à l'étape 1, on lance les deux pièces,

— à l'étape 2, on lance les pièces ayant donné PILE à l'étape 1 (s'il en existe),

— à l'étape 3, on lance les pièces ayant donné PILE à l'étape 2 (s'il en existe),

$\vdots$

— à l'étape n, on lance les pièces ayant donné PILE à l'étape précédente $n-1$

On suppose que les lancers successifs éventuels d'une même pièce sont indépendants et que les deux pièces sont indépendantes l'une de l'autre.

On considère, pour tout entier naturel n non nul, les évènements

- A_n : « obtenir 0 fois PILE à l'étape n »
- B_n :« obtenir 1 fois PILE à l'étape n »
- C_n : « obtenir 2 fois PILE à l'étape n'' »

et on note $a_n = P(A_n), b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

1. Calculer a_1, b_1 et c_1.

2. Soit n un entier naturel non nul. Calculer les probabilités conditionnelles $\mathrm{P}_{A_n}(A_{n+1})$, $\mathrm{P}_{B_n}(A_{n+1})$ et $\mathrm{P}_{C_n}(A_{n+1})$
Un argumentaire est attendu pour expliquer les valeurs de chacune de ces probabilités.
3. À l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{2}b_n + \dfrac{1}{4}c_n \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{2}b_n + \dfrac{1}{2}c_n \\ c_{n+1} = \dfrac{1}{4}c_n \end{cases}$$

4. (a) Vérifier que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ où la matrice M est celle définie dans la Partie A.
(b) Démontrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$.
5. (a) En déduire que

$$\forall n \geqslant 1, \quad \mathrm{P}(A_n) = 1 - \frac{2}{2^n} + \frac{1}{4^n}, \quad \mathrm{P}(B_n) = \frac{2}{2^n} - \frac{2}{4^n} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(C_n) = \frac{1}{4^n}$$

(b) Vérifier que la somme de ces trois probabilités est égale à 1 et donner la limite de chacune d'elles.

3 Problème 2 : extrait ECRICOME

Partie A : calcul matriciel

Soient les matrices carrées :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note I la matrice-unité d'ordre 3.

1. Montrer à l'aide du pivot de Gauss que P est inversible et calculer son inverse.

2. Vérifier la relation :
$$P^{-1}AP = D$$
3. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul :
$$A^n = PD^nP^{-1}$$
4. Vérifier que :
$$P^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ 0 \end{pmatrix}$$
Et en déduire que pour tout $n \geq 1$:
$$A^n\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

Partie B : Etude d'une expérience

On considère désormais deux urnes :
- Une urne bleue contenant initialement un jeton marqué 0 et un jeton marqué 1.
- Une urne rouge contenant initialement un jeton marqué 0 et un jeton marqué 1.

On appelle « échange » l'action consistant à extraire simultanément un jeton de chaque urne puis à le remettre dans l'autre urne. On effectue des échanges successifs indéfiniment.

Pour tout entier naturel non nul n on désigne par Z_n la variable aléatoire réelle discrète égale à la somme des points marqués sur les jetons de l'urne bleue après le n-ième échange.

On note Z_0 la variable certaine égale à 1, somme initiale des points dans l'urne bleue.

1. Donner l'ensemble des valeurs possibles de Z_1 et déterminer la loi de Z_1.
2.
   (a) Soit n un entier naturel non nul. Déterminer les probabilités conditionnelles :
   $$p_{(Z_n=0)}\left(Z_{n+1}=0\right), \quad p_{(Z_n=1)}\left(Z_{n+1}=0\right), \quad p_{(Z_n=2)}\left(Z_{n+1}=0\right)$$
   On note dans la suite et pour tout entier naturel n :
   $$p_n = p\left(Z_n = 0\right), \quad q_n = p\left(Z_n = 1\right), \quad r_n = p\left(Z_n = 2\right)$$
   (Ce qui entraîne $p_0 = 0$, $q_0 = 1$, $r_0 = 0$).

   (b) Grâce à la question **a.** et à une formule de probabilités totales, exprimer p_{n+1} en fonction de q_n.

(c) Donner les relations similaires fournissant q_{n+1} en fonction de p_n, q_n, r_n et r_{n+1} en fonction de q_n.

3. On note pour tout entier naturel n :

$$U_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$$

(a) Vérifier que pour tout entier naturel n non nul :

$$U_{n+1} = AU_n$$

Cette relation est-elle valable pour $n = 0$?

(b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$U_n = A^n U_0$$

(c) En déduire pour $n \geqslant 1$, p_n, q_n, r_n en fonction de n ainsi que $\lim_{n\to+\infty} p_n$, $\lim_{n\to+\infty} q_n$, $\lim_{n\to+\infty} r_n$.

4. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire Z_n.