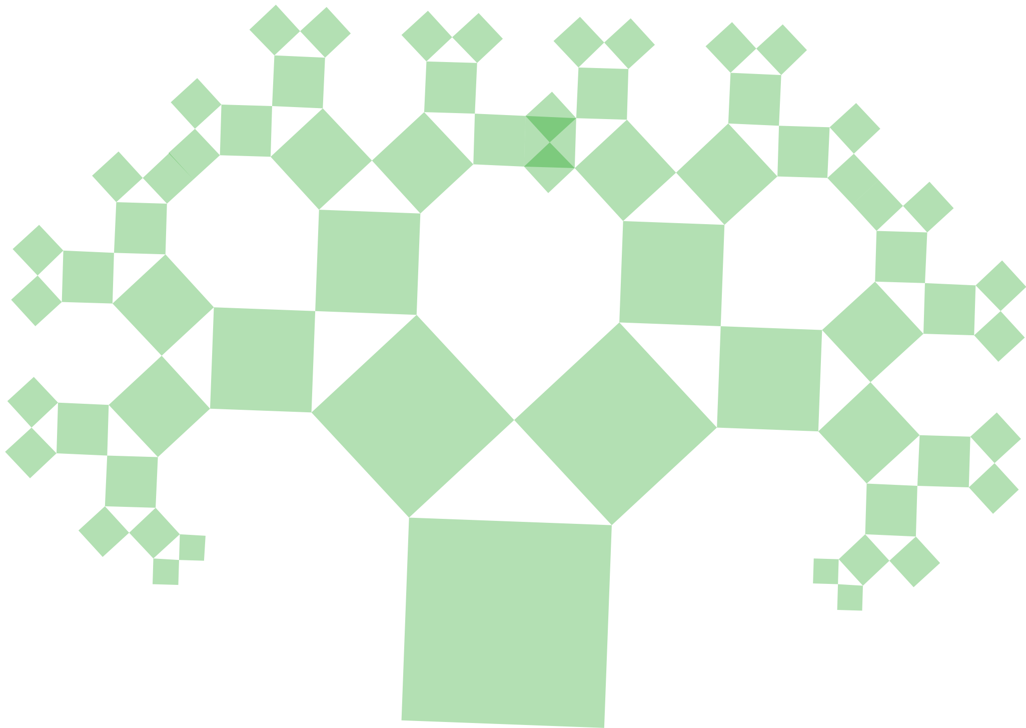
1 Arbres « de Pythagore »

Ce premier exemple permet de donner une construction itérative d'un objet que l'on trouve parfois nommé « arbre de Pythagore » ! Notons qu'il s'agit là d'une reconstruction historique (comme il en existe beaucoup, cf la corde à 13 noeuds), car absolument rien n'indique dans l'état actuel de nos connaissances que cette construction était connue chez les grecs. Néanmoins, ce qui rend intéressant cette construction, c'est que le principe est accessible sans beaucoup de pré-requis en géométrie.



1. Reproduire la figure suivante sous Géogébra.
2. On désire mettre en oeuvre une activité de classe. Elle consistera à dessiner un arbre Pythagore. Chaque élève dispose d'une feuille standard A4 (21cm par 29,7 cm).
   (a) Calculer $29,7/21$. De quel nombre bien connu ce rapport est-il proche ? Montrer qu'une demi-feuille A4 (i.e une A4 coupée en deux dans un sens à choisir convenablement) possède le même rapport $\dfrac{longueur}{largeur}$
   (b) Quelle dimension du carré de base doit-on choisir pour que l'arbre rentre dans la feuille et qu'il occupe le maximum d'espace.
3. Imaginer d'autres activités possibles à partir de ce principe.

2 Iterated Functions System - IFS

I.F.S

Un IFS est un ensemble de N applications contractantes $T_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
On défini (à partir des T_i), une nouvelle fonction T, elle aussi contractante sur l'ensemble des parties de $\mathbb{R}^2$, muni de la distance de Hausdorff, par l'expression

$$T(A) = \bigcup_{i=1}^{N} T_i(A)$$

Le théorème du point fixe assure l'existence et l'unicité d'un sous-ensemble fixe $F \subset \mathbb{R}^2$ tel que $T(F) = F$.
F est appelé « attracteur »de l'IFS. Il a une « structure fractale »dans un sens que l'on va définir au fur et à mesure.
En pratique, F est obtenue comme la limite de $T^n(F_0)$ pour $n \to \infty$ où F_0 est un compact quelconque.

2.1 Un arbre fractal

Dans la figure suivante :

- Repérer F_0 ;
- Identifier les trois applications contractantes ;
- Utiliser Géogebra et Scratch pour réaliser les deux figures suivantes.

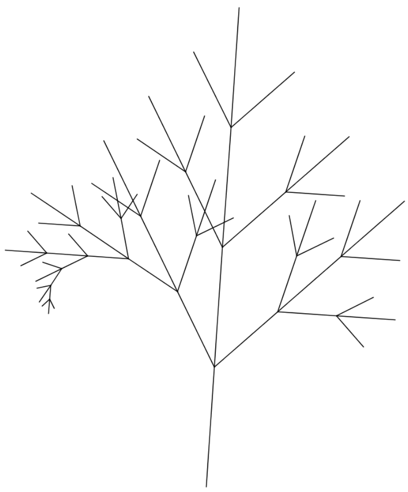


Figure 1 – Un arbre sous Geogébra

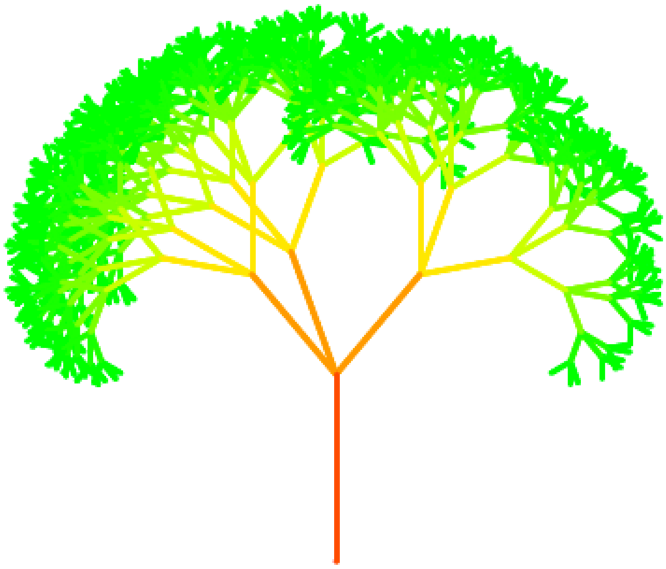


Figure 2 – Arbre sous SCRATCH

FIGURE 3 – Fougère réalisée avec Géogebra

2.2 Voyage en NZ : Fougère de Barnsley

On prend pour F_0 un segment quelconque. On considère :

$$T_1(x,y) = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$T_2(x,y) = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.04 \\ -0.04 & 0.85 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.00 \\ 1.60 \end{bmatrix}$$

$$T_3(x,y) = \begin{bmatrix} 0.20 & -0.26 \\ 0.23 & 0.22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.00 \\ 1.60 \end{bmatrix}$$

$$T_4(x,y) = \begin{bmatrix} -0.15 & 0.28 \\ 0.26 & 0.24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.44 \end{bmatrix}$$

1. Interpréter géométriquement T_1, T_2, T_3 et T_4
2. Réaliser la figure sous Géogebra ou SCRATCH : Que remarque t'on ?
3. On se propose une méthode itérative plus fine pour générer la fougère en construisant une suite de point A_n avec $A_0 = (0,0)$, puis A_n étant construit, on construit A_{n+1} comme suit :
   - On choisit aléatoirement $i \in [\![1;4]\!]$
   - On pose $A_{n+1} = T_i(A_n)$

   Tester cette méthode en utilisant le tableur de Géogebra ou le logiciel SCRATCH. Que remarque t'on ?

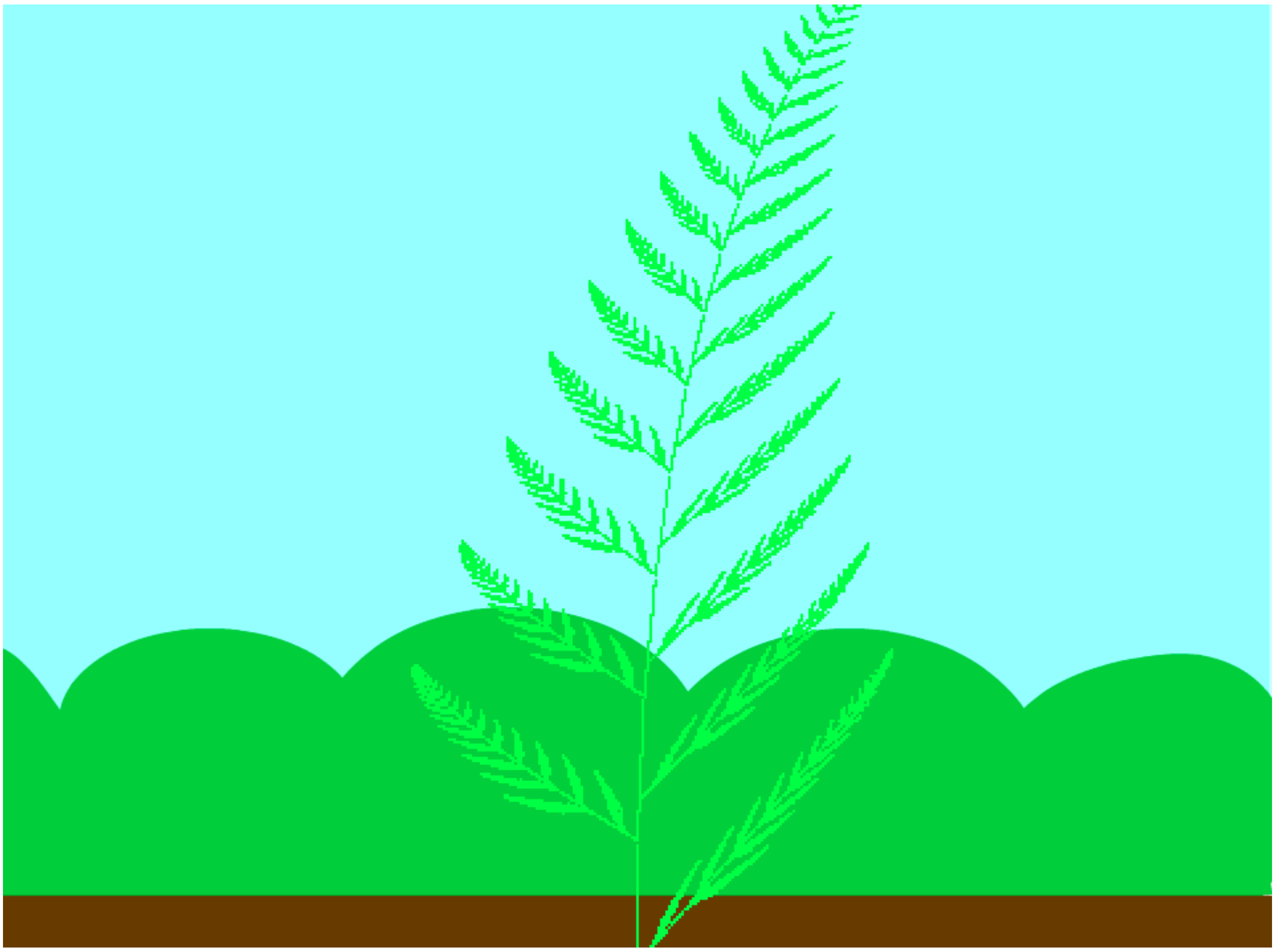


Figure 4 – Fougère réalisée avec SCRATCH

4. On propose une amélioration de la méthode pour obtenir une figure plus réaliste : on va choisir l'indice i avec une certaine probabilité en tenant compte que le tronc de la fougère est moins important que les feuilles. On choisi donc :
   - T_1 avec une probabilité de 1%
   - T_2 avec une probabilité de 85%
   - T_3 avec un probabilité de 7%
   - T_4 avec un probabilité de 7%

   Utiliser cette méthode et le logiciel Scratch pour obtenir : On pourra utiliser le mode turbo (SHIFT + drapeau vert)