Fonctions 3 : continuité et dérivabilité

1 Continuité d'une fonction

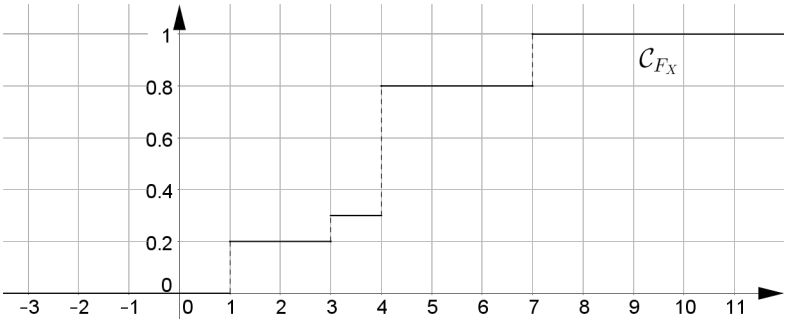
Définition

Soit une fonction f définie sur $\mathcal{D}_f$ et $a \in \mathcal{D}_f$.
f est dite continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Si f est continue en a pour tout $a \in \mathcal{D}_f$, on dit que f est continue sur $\mathcal{D}_f$

Contre-exemple :

Les fonctions de répartition rencontrées au chapitre précédent ne sont pas continues. Par exemple, la fonction représentée sur le graphique ci-dessous est discontinue en $a = 1$, $a = 3$, $a = 4$, $a = 7$ (et continue partout ailleurs).



En effet, quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, $f(x)$ est égal à 0, et donc $f(x)$ ne tend pas vers $f(1) = 0.2$.

Intuitivement, une fonction numérique est continue sur un intervalle lorsqu'on peut tracer sa courbe représentative sans lever son crayon.

Les fonctions usuelles sont continues : $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$), $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$), $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$.

Propriétés

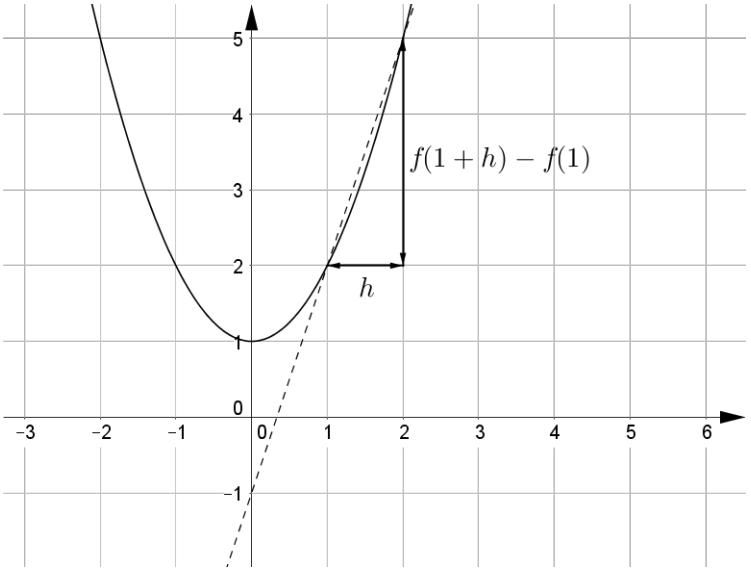
La somme, le produit, la composée de fonctions continues est une fonction continue.
D'autre part, si f est une fonction continue sur un intervalle I ne s'annulant pas sur I, alors la fonction $\dfrac{1}{f}$ est continue sur I.

2 Dérivée d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie au voisinage d'un nombre a.
On dit que f est dérivable en a si le rapport $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite lorsque h tend vers 0.
Le cas échéant, cette limite est appelée nombre dérivé de f en a et notée $f'(a)$.

Exemple. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$.
Prenons $a = 1$: $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \dfrac{(1+h)^2+1-2}{h} = \dfrac{h^2+2h}{h} = h+2$ donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = 2$.
Donc la fonction f est dérivable en $a = 1$ et $f'(1) = 2$.



Définition

Soit une fonction f dérivable sur un ensemble $\mathcal{D}$. On appelle fonction dérivée et on note f' la fonction qui à tout nombre a de $\mathcal{D}$ associe $f'(a)$.

3 Dérivée des fonctions usuelles

Nous rappelons ci-dessous les dérivées des fonctions usuelles, où k est un nombre réel et $n \in \mathbb{N}^*$:

Dérivées des fonctions usuelles

Fonction	Ensemble de définition	Dérivée
$f(x) = a$ (constante)	$\mathbb{R}$	0
$f(x) = x^n$	$\mathbb{R}$	$n.x^{n-1}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{-n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

4 Dérivées et opérations

4.1 Opérations arithmétique

Soient deux fonctions u et v dérivables sur un ensemble $\mathcal{D}$ et k un nombre réel, alors les fonctions $k \times u$, $u + v$, $u \times v$ et $\dfrac{u}{v}$ sont dérivables et leurs dérivées sont données par le tableau :

Opérations sur les dérivées

Opération	Fonction	Dérivée
Somme	$u + v$	$u' + v'$
Multiplication par un nombre	$k \times u$	$k \times u'$
Multiplication	$u \times v$	$u \times v' + u' \times v$
Division	$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$
Composition avec puissance	u^n	$n \times u' \times u^{n-1}$

4.2 La composée de fonctions

Soit f une fonction dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et g une fonction dérivable sur $\mathcal{D}_g$ tel que $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$, alors la fonction $g \circ f$ est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et $(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g' \circ f(x)$.

Exemple : Soit F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \sqrt{x^2+1}$.
F est la composée de $f : x \mapsto x^2+1$ définie et dérivable sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ avec g définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ par $g : X \mapsto \sqrt{X}$. On a bien $f(\mathcal{D}_f) = [1; +\infty[\subset \mathcal{D}_g$.
Par ailleurs $f'(x) = 2x$ et $g'(X) = \dfrac{1}{2\sqrt{X}}$.
Donc $F'(x) = f'(x) \times g'(f(x)) = 2x \times \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$.

À retenir.

Pour toute fonction u, et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la dérivée de u^n est $n \times u' \times u^{n-1}$,
et en particulier la dérivée de $\dfrac{1}{u}$ est $-\dfrac{u'}{u^2}$.
Pour toute fonction positive u, la dérivée de $\sqrt{u}$ est $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

5 Approximation affine

Approximation affine

Si f est dérivable en a, alors pour x proche de a, $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$.
Graphiquement (figure.2), cela correspond à l'équation de la tangente qui est

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

.

Exemple : soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 - 2x + 1$. Donner l'équation des tangentes aux points d'abscisses 0 et 2.
On a $f'(x) = 3x^2 - 2$.

- En $x = 0$: $f'(0) = -2$ et $f(0) = 1$; donc au voisinage de $x = 0$, $f(x) \approx -2(x-0)+1 = -2x+1$.
- En $x = 2$: $f'(2) = 10$ et $f(2) = 5$; donc au voisinage de $x = 2$, $f(x) \approx 10(x-2)+5 = 10x - 15$.

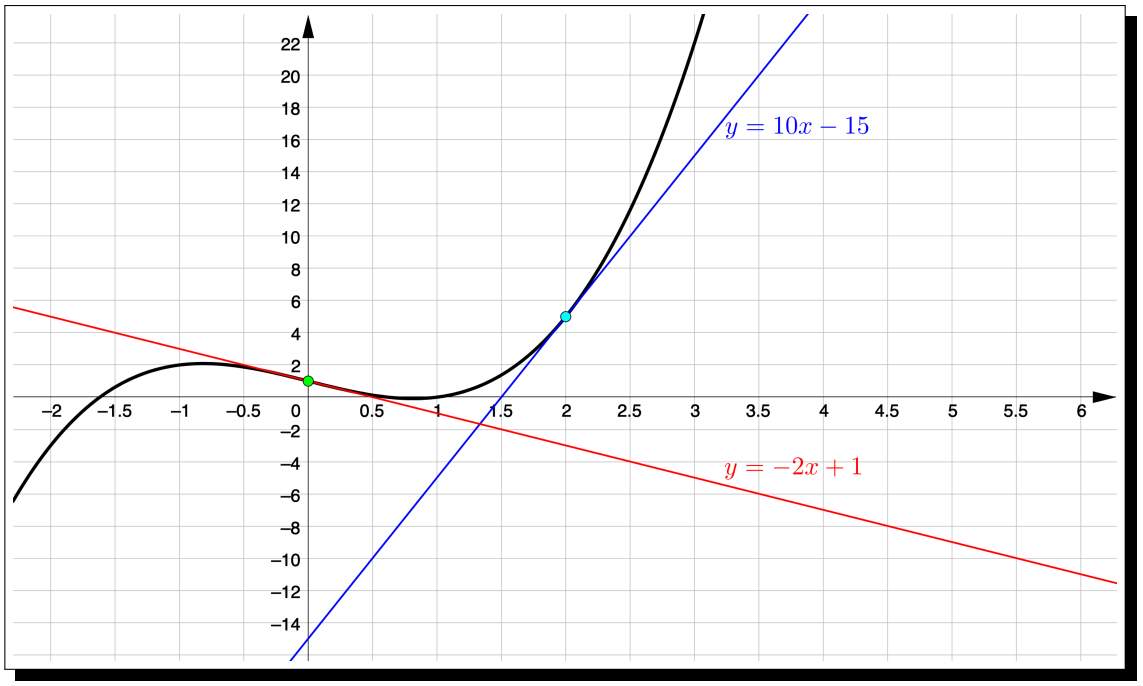


FIGURE 1 – Deux tangentes de la fonction $x \mapsto x^3 - 2x + 1$

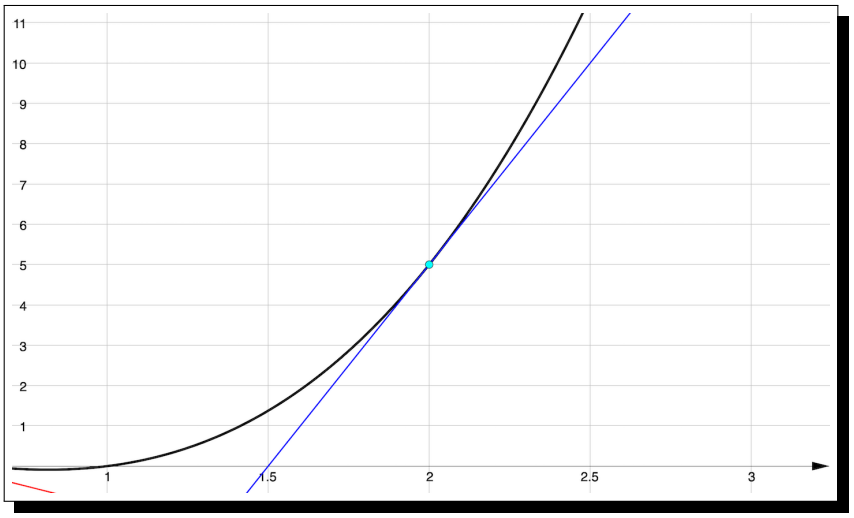


FIGURE 2 – Localement la courbe et la tangente en $a = 2$ sont très proches

6 Dérivée et variations

Théorème

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I, et si $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) pour tout $x \in I$, en ne s'annulant que pour un nombre fini de valeurs de x, alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I.

Exemple.
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)^3(x-3)$.

$f'(x) = 3(x+2)^2(x-3) + (x+2)^3 = (x+2)^2(3(x-3)+x+2) = (x+2)^2(4x-7)$.
Le carré est positif, donc $f'(x)$ est du signe de $(4x-7)$.

On peut calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition, puis calculer

$$f(7/4) \simeq -65.9$$

x	$-\infty$		-2		$\frac{7}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$			-65.9	$\nearrow$	$+\infty$

La dérivée est négative sur l'intervalle $]-\infty; \frac{7}{4}]$ (en s'annulant deux fois) , donc la fonctions f est strictement décroissante sur cet intervalle :

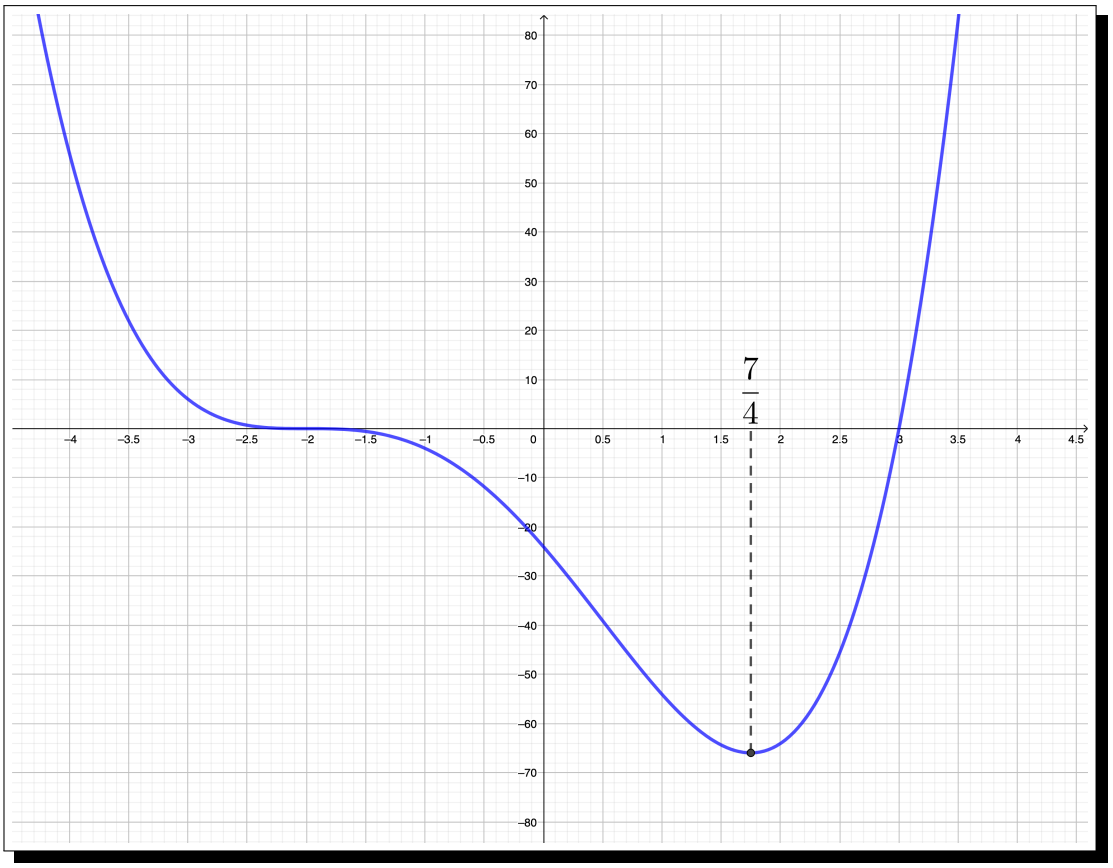


FIGURE 3 – Représentation de la fonction $x \mapsto (x+2)^3(x-3)$

7 Dérivée à droite et à gauche

Définition

Soit f une fonction définie au voisinage d'un nombre a.

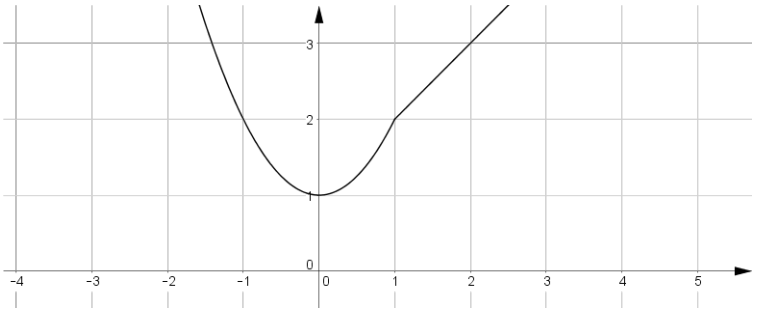
On dit que f est dérivable **à droite** (resp. **à gauche**) en a si le rapport $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite lorsque h tend vers 0 **par valeurs positives** (resp. **par valeurs négatives**). Le cas échéant, cette limite est appelée nombre dérivé de f **à droite** (resp. **à gauche**) en a et notée $f'_d(a)$ (resp. $f'_g(a)$).

Exemple.

Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = x^2+1 & \text{si } x \in]-\infty;1] \\ f(x) = x+1 & \text{si } x \in]1;+\infty[\end{cases}$

f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty;1]$ et $]1;+\infty[$.
D'autre part elle est continue en 1 car $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = 2 = f(1)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = 2 = f(1)$
Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

Calculons la dérivée à droite :
Pour tout $h<0$, $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \dfrac{(1+h)^2+1-2}{h} = \dfrac{h^2+2h}{h} = h+2$ donc $f'_g(1) = 2$.
Calculons la dérivée à gauche :
Pour tout $h>0$, $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \dfrac{1+h+1-2}{h} = 1$ donc $f'_d(1) = 1$.

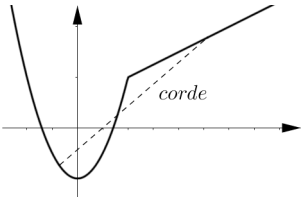


8 Convexité

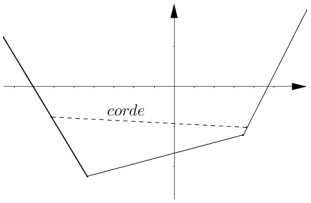
Définition

Une fonction f définie et continue sur un intervalle I est dite convexe (resp. concave) sur I si sa courbe représentative est située au-dessous (resp. au-dessus) de ses cordes.

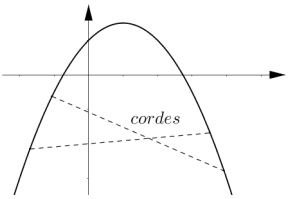
Ni convexe ni concave sur $\mathbb{R}$



Convexe sur $\mathbb{R}$



Concave sur $\mathbb{R}$

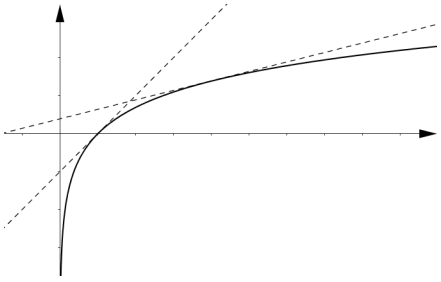


Propriété

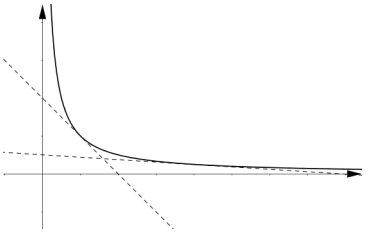
Une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I est convexe (resp. concave) si et seulement si sa courbe représentative est située au-dessus (resp. au dessous) de ses tangentes.

Exemple :

Fonction concave sur $]0;+\infty[$



Fonction convexe sur $]0;+\infty[$



Propriété

Une fonction f deux fois dérivables sur un intervalle I est convexe (resp. concave) sur I si et seulement si $f''(x) \geq 0$ (resp. $f''(x) \leq 0$) pour tout $x \in I$.

Exemple : Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 + x + 1$.
f est deux fois dérivable, $f'(x) = 4x^3 + 1$ et $f''(x) = 12x^2$.
Donc $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc f est convexe sur $\mathbb{R}$.

Point d'inflexion

Point d'inflexion

Soit une fonction f définie au voisinage de a.
On dit que a est un point d'inflexion pour f si $f''(x)$ s'annule en changeant de signe en $x = a$.

Exemple : Reprenons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)^3(x-3)$.
On a $f''(x) = 2(x+2)(4x-7) + 4(x+2)^2 = 2(x+2)(5x-5) = 10(x+2)(x-1)$.
Donc $f''(x)$ s'annule deux fois en changeant de signe, en $x = -2$ et en $x = 1$, qui sont les deux points d'inflexion de la courbe.