Exercices : Matrices

1 Introduction aux matrices

Une entreprise minière extrait quatre minerais différents (notés A, B, C, D) de par le monde. On connait les volumes d'extraction de deux de ses usines (Usine 1 en Nouvelle-Calédonie, Usine 2 au Brésil) au premier semestre de l'année 2019 (exprimés en millier de tonnes)

	A	B	C	D
Usine 1	64	31	16	28
Usine 2	24	48	28	8

Par convenance on s'autorise à écrire ce tableau sous une forme qui ne conserve que les nombres :

$$\begin{pmatrix} 64 & 31 & 16 & 28 \\ 24 & 48 & 28 & 8 \end{pmatrix} \quad (\textit{Matrice de production})$$

On appelle ce tableau « matrice de production ».

On le note T_1 et on s'autorise donc à écrire $T_1 = \begin{pmatrix} 64 & 31 & 16 & 28 \\ 24 & 48 & 28 & 8 \end{pmatrix}$

1. Si la matrice production du second semestre est $T_2 = \begin{pmatrix} 36 & 20 & 10 & 12 \\ 6 & 52 & 20 & 2 \end{pmatrix}$, quelle est est la matrice A de production **annuelle** ?

   Vous venez de calculer la somme de T_1 et de T_2, qui se note $A = T_1 + T_2$

2. Des mouvements de grève, des intempéries ont totalement bloqués la production pour toute l'année en 2020. Quelle est la matrice production annuelle pour 2020 ? Que vaut alors la matrice de production cumulées pour 2019 et 2020 ?

   La matrice remplies de 0 se note aussi 0. On a alors $T + 0 = T$ pour toute matrice T

3. Après cette année blanche, la production mondiale subit un bond spectaculaire et double par rapport au second semestre de 2019 ! Donner l'expression (sans effectuer les calculs cependant) de T_1' la production du premier semestre 2021.
   Quel notation proposez-vous pour écrire T_1' en fonction de T_2 ?

4. Le tableau du coût de production par millier de tonnes produites est le suivant (prix en million de $ US) :

Minerai	Coût de production en million de USD
A	12
B	10
C	9,5
D	7

A partir ce tableau on introduit donc une nouvelle matrice (« matrice coût »),

$$C = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 9,5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Calculer la matrice $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ (*matrice coût annuel*) où α (resp.β) est le coût annuel de production de l'usine 1 (resp.2)

5. Examinons à présent le cas général.
On dispose de la matrice de production $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ et la matrice de coût $C = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$. Quel calcul doit-on faire entre A et C pour calculer la matrice $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ (*matrice coût annuel*) ?
On pourra expliquer la méthode par un schéma.
Vous venez d'expliquer comment calculer le produit de deux matrices.

2 Exercices

Exercice 1 (*Somme et produit*)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer toutes les sommes de matrices (qui peuvent l'être).
2. Parmi les produits suivants, calculer ceux qui peuvent l'être :

$$A \times B \quad B \times A \quad C \times D \quad D \times C \quad A \times E \quad C \times E$$

Exercice 2 (*Somme, produit, puissance*)

On considère les matrices à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculer, s'ils ont un sens, les produits AB, BA, AC, CA, B^2.

Exercice 3 (*Equation matricielle*)

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & 3,5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4,2 & 1 \\ 5,1 & c \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} d & -2 \\ 8,3 & 6,1 \end{pmatrix}$.

Trouver a, b, c, d pour que $A + B = C$

Exercice 4 (*Equation matricielle*)

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 0,5 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & b \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -4 & -14 \\ c & d \end{pmatrix}$

Trouver a, b, c, d pour que $A \times B = C$

Exercice 5 (*Equation matricielle*)

On pose $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$

Trouver a et b pour que $A \times B = C$

Exercice 6

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Calculer $A + B$, $2A - B$, AB et BA.

3 Systèmes linéaires

Exercice 7

On considère 3 réels x, y et z et les matrices $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -4 & 5 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$. À quel système d'équations l'égalité matricielle AX = U est-elle équivalente ?

Exercice 8

On considère le système (S) suivant :

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -1 \\ -5x + y = 3 \\ x + y - z = 4 \end{cases}$$

À quelle égalité matricielle le système (S) est-il équivalent ?